

426/68

POLSKA AKADEMIA NAUK
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

ARCHIWUM ELEKTROTECHNIKI

TOM X · ZESZYT 2

KWARTALNIK

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
WARSZAWA 1961

SPIS TREŚCI

Str.

P. Szulkin: Ogólne rozwiązanie problemu promieniowania szczeliny w walcu o dowolnym przekroju	297
P. Szulkin: Susceptancja przeszkody kołowej w falowodzie kołowym pobudzonym modelem TE_{01}	309
P. Szulkin: Analiza biernych układów elektrycznych wielooznaczonych z elementami nieliniowymi	323
J. Kudrewicz: O pewnej metodzie badania stabilności nieliniowych układów elektrycznych	335
L. Knoch: Warunki równoczesnego wytwarzania drgań stabilnych o dwóch częstotliwościach nieharmonicznych	369
A. Góral: Dynamiczne właściwości ferromagnetyków o prostokątnej pętli histerezy	407
J. Swiderski: Zastosowanie zjawiska fotowoltaicznego do badania jednorodności germanu	441
B. Mroziewicz: Technologia i niektóre właściwości germanowych diod tunelowych	503
Sz. Firko wicz: Iskierzenie katod tlenkowych w elektronowych lampach próżniowych w wyniku przepływu prądu przez warstwę emisyjną	505
B. Urbański: Obwód magnetyczny głowicy odczytującej i zapisującej sygnały wielkiej częstotliwości	535
W. Latek: Naprężenia termiczne w uzwojeniach wirników turbogeneratorów	561
T. Lipski: Kryteria prawidłowości działania bezpieczników w obwodach prądu stałego	579
Komunikaty	
A. Stano: Germanowe diody tunelowe	595
B. Schmidt i C. E. Kuźma: Podwójny czujnik termistorowy ZE 12	596
B. Schmidt i C. Kuźma: Automatyczne zdejmowanie charakterystyk statycznych napięciowo-prądowych termistora	598
Z. Krzycki: Szerokopasmowy izolator ferrytowy na pasmo 3 cm	599
Z. Krzycki: Układ do pomiaru linii rezonansowej ferrytów w falowodzie z przesłoną	601

СОДЕРЖАНИЕ

П. Шулькин: Общее решение проблемы излучения зазора в цилиндре произвольного сечения	307
П. Шулькин: Реактивная проводимость кольцевого препятствия в круговом волноводе возбужденном mode TE_{01}	321
П. Шулькин и Кацпінський: Анализ пассивных многоконтурных систем с нелинейными элементами	333
Я. Кудревич: Об одном из методов исследования стабильности нелинейных электрических систем	366
Л. Кнох: Условия одновременного генерирования стабильных колебаний с двумя негармоническими частотами	404
А. Гураль: Динамические свойства ферромагнитных материалов с прямоугольной петлей гистерезиса	438
Я. Свидерски: Использование явления возникновения фотоэлектродвижущей силы при исследовании однородности германия	467
Б. Мрозович: Технология и некоторые свойства германиевых туннельных диодов	504
С. Фиркович: Искрение окисных катодов электровакуумных приборов в результате нагрузки эмиссионного слоя током	532
Б. Урбаньски: Магнитный контур головки для воспроизведения и записи сигналов высокой частоты	526
В. Лятек: Термические напряжения в обмотках роторов турбогенераторов	577
Т. Липски: Критерии исправного действия предохранителей при постоянном токе	593
Сообщения	
А. Стано: Германиевые туннельные диоды	595
Б. Шмидт и С. Е. Кузьма: Двойной термисторный индикатор	596
Б. Шмидт и С. Кузьма: Автоматическое снятие вольтамперных характеристик термистора	598
З. Кшыцки: Широкополосный ферритовый изолятор на трехсантиметровую полосу	599
З. Кшыцки: Установка для измерения резонансной линии ферритов в волноводе с диафрагмой	601

CONTENTS — SOMMAIRE

P. Szulkin: General solution to problem of radiating slot of arbitrary cross section in a cylinder	208
P. Szulkin: Susceptance of circular obstacle in circular waveguide induced by mode TE_{01}	321
P. Szulkin: Analysis of passive multimesh electric networks with non-linear elements	333
J. Kudrewicz: On a method for examining stability of electric nonlinear networks	367
J. Knoch: Conditions of simultaneous generation of steady-state oscillations with two anharmonic frequencies	405
A. Góral: Dynamic properties of rectangular hysteresis-loop ferromagnetics	439
J. Swiderski: Application of photovoltaic effect to examination of homogeneity of germanium	468
B. Mroziewicz: Technology and some properties of germanium tunnel diodes	471
S. Firko wicz: Oxide-coated cathode sputtering in vacuum tubes as result of current passing through emitting layer	533
B. Urbański: Magnetic circuit of playback and record head for high frequency signals	558
W. Latek: Thermal stresses in windings of turbo-generator rotors	578
T. Lipski: Correctness criteria of fuses operating in direct current circuits	594
Communiqués	
A. Stano: Germanium tunnel diodes	595
B. Schmidt, C. Kuźma, E. Kuźma: Double-thermistor feeler ZE 12	597
B. Schmidt, C. Kuźma: Auto-recording of static voltage-current characteristics of thermistor	598
Z. Krzycki: Ferrite wideband insulator for 5 cm band	600
Z. Krzycki: Setup for measuring resonant line of ferrites in waveguide with iris	601

POLSKA AKADEMIA NAUK
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

ARCHIWUM ELEKTROTECHNIKI

TOM X • ZESZYT 2

KWARTALNIK

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
WARSZAWA 1961

R A D A R E D A K C Y J N A

PROF. JANUSZ LECH JAKUBOWSKI, PROF. BOLESŁAW KONORSKI,
PROF. IGNACY MALECKI, PROF. WITOLD NOWICKI, PROF. PAWEŁ SZULKIN

K O M I T E T R E D A K C Y J N Y

Redaktor Naczelny

PROF. JANUSZ GROSZKOWSKI

Z-ca Redaktora Naczelnego

PROF. PAWEŁ NOWACKI

Sekretarz

WACŁAW ZWOLAKOWSKI

PRINTED IN POLAND

COPYRIGHT BY
PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
WARSZAWA 1961

ADRES REDAKCJI:

Warszawa, ul. Koszykowa 75, Politechnika,
Zakład Radiotechniki, tel. 8.32.04 lub 8.87.40
Redakcja czynna: poniedziałki, środy i piątki

Państwowe Wydawnictwo Naukowe — Dział Czasopism
Warszawa, Miodowa 10

Nakład 759+141 egz.	Do składania 24 IV 1961
Ark. wyd. 20,5 druk. 19,5	Podpisano do druku 29 VI 1961
Papier druk. sat. kl. III 80 g 70×100/16	Druk ukończ. w czerwcu 1961
Cena zł 30,—	E-1 Zamówienie 286/73

Drukarnia Uniwersytetu im. A. Mickiewicza — Poznań, ul. Fredry 10

538.566.2:621.391.6

P. SZULKIN

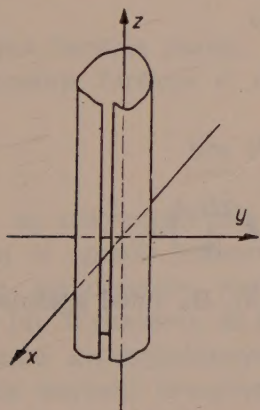
Ogólne rozwiązanie problemu promieniowania szczeliny w walcu o dowolnym przekroju

Rękopis dostarczono 27. 7. 1960 r.

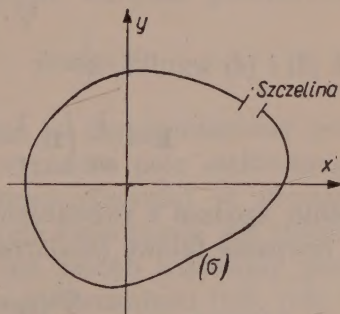
Praca podaje niektóre podstawowe aspekty teorii anteny szczelinowej. Zagadnienie sprowadza się do dwuwymiarowego problemu wartości brzegowej względem pojedynczej wielkości skalarnej, spełniającej równanie falowe. Daje się dowód istnienia i jednoznaczności rozwiązania i wyprowadza się równanie całkowe, które musi spełniać powyższe rozwiązanie.

Podaje się związek pomiędzy rozpatrywanym zagadnieniem a odpowiadającym mu problemem dyfrakcyjnym, co w niektórych wypadkach może ułatwić wyznaczenie szukanej charakterystyki promieniowania.

Rozpatrujemy walec o nieskończonej długości, którego tworzące są równoległe do osi z prostokątnego układu współrzędnych (rys. 1). Przekrój tego walca przez płaszczyznę (x, y) jest ograniczony krzywą σ (rys. 2). Krzywa σ jest zamknięta i ma krzywiznę ciągłą. Zakładamy, że istnieje liczba całkowita $m > 0$ taka, że dowolna prosta równoległa do osi x lub osi y przecina krzywą σ najwyżej w m punktach.



Rys. 1



Rys. 2

Na powierzchni walca równoległe do osi z wycięta jest szczelina o stałej szerokości. Zakładamy, że walec jest doskonale przewodzący, co implikuje zanik stycznego pola elektrycznego na jego powierzchni z wy-

jątkiem szczeliny. Przyjmujemy dalej, że szczelina jest pobudzona w taki sposób, że wektor pola elektrycznego w szczelinie jest niezależny od z , równoległy do płaszczyzny (x, y) i styczny do przedłużenia walca w szczelinie. Wreszcie zakładamy, że w przestrzeni otaczającej walec nie ma źródeł energii. Problem sprowadza się do wyznaczenia pola elektromagnetycznego spełniającego równania Maxwella w obszarze zewnętrznym do walca, przyjmującego zadane wartości na walcu i spełniającego dodatkowo warunek promieniowania w nieskończoności.

Ponieważ prądy powierzchniowe na walcu nie mają składowej z , potencjał wektorowy \mathbf{A} można napisać jako

$$\mathbf{A} = \mathbf{1}_r A_r(r, \varphi) + \mathbf{1}_\varphi A_\varphi(r, \varphi), \quad (1)$$

gdzie $\mathbf{1}_r$ i $\mathbf{1}_\varphi$ — odpowiednie wektory jednostkowe wzdłuż osi układu współrzędnych walcowych.

W tych warunkach

$$\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{1}_z \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \right] = \mathbf{1}_z H_z. \quad (2)$$

Co oznacza, że w przestrzeni zewnętrznej wektor pola magnetycznego ma jedynie składową z .

Przyjmując zależność czasową $e^{-j\omega t}$ dla wszystkich wielkości polowych możemy równania Maxwella dla przestrzeni zewnętrznej napisać w postaci

$$\nabla \times \mathbf{E} = j\omega \mu \mathbf{H}, \quad (3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = -j\omega \epsilon \mathbf{E}, \quad (4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0. \quad (6)$$

Z równań (2) i (4) wynika, że

$$\mathbf{E} = \frac{j}{\omega \epsilon} \left(\mathbf{1}_r \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \mathbf{1}_\varphi \frac{\partial H_z}{\partial r} \right). \quad (7)$$

Jednocześnie, zgodnie z równaniami (3) ÷ (6), H_z musi spełniać dwuwymiarowe równanie falowe (skalarne)

$$\nabla^2 H_z + k^2 H_z = 0, \quad (8)$$

gdzie $k^2 = \omega^2 \mu \epsilon$.

Wymagamy aby składowa styczna \mathbf{E} na powierzchni walca przyjmowała zadane wartości. Jeżeli równanie krzywej σ jest

$$r = f(\varphi), \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi, \quad (9)$$

to jednostkowy wektor wzdłuż normali zewnętrznej wyraża się wzorem

$$\mathbf{1}_n = \frac{\nabla[r - f(\varphi)]}{|\nabla[r - f(\varphi)]|} = \frac{\mathbf{1}_r r - \mathbf{1}_\varphi r'}{\sqrt{r^2 + r'^2}}. \quad (10)$$

Stąd wynika, że

$$\mathbf{1}_n \times \mathbf{E} = \mathbf{1}_z E_t = \mathbf{1}_z \frac{j}{\omega \varepsilon} \left(\frac{-r \frac{\partial H_z}{\partial r} + \frac{r'}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi}}{\sqrt{r^2 + r'^2}} \right) \quad (11)$$

i uwzględniając zależność

$$\frac{\partial H_z}{\partial n} = \mathbf{1}_n \cdot \nabla H_z$$

mamy ostatecznie

$$E_t = - \frac{j}{\varepsilon \omega} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial n}. \quad (12)$$

W ten sposób zagadnienie nieskończonego walca ze szczeliną sprowadza się do następującego zagadnienia wartości brzegowej: Szukamy funkcji skalarnej $w = H_z$ dwóch zmiennych niezależnych, która spełnia równanie falowe

$$(\nabla^2 + k^2) \cdot w = 0 \quad (13)$$

w obszarze zewnętrznym względem krzywej zamkniętej σ oraz której pochodna wzdłuż normali przyjmuje zadane wartości na krzywej σ

$$\frac{\partial w}{\partial n} = W, \quad (14)$$

gdzie W jest funkcją znaną.

Jednocześnie funkcja w musi spełniać warunek promieniowania [1]

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial w}{\partial r} - jkw \right) = 0. \quad (15)$$

Wiadomo, że znajomość pola stycznego na trójwymiarowej powierzchni zamkniętej w sposób jednoznaczny wyznacza pole elektromagnetyczne (spełniając jednocześnie warunek promieniowania) w przestrzeni zewnętrznej [4]. Wykażemy, że odpowiednie twierdzenie jest również ważne dla problemu dwuwymiarowego. W ten sposób uzyskamy pewność, że zagadnienie wartości brzegowej, opisane równaniami (13), (14) i (15) ma jednoznaczne rozwiązanie.

Założenia powyższego twierdzenia są następujące:

- a) $(\nabla^2 + k^2)w = 0$ w obszarze zewnętrznym względem krzywej σ , która może składać się z kilku zamkniętych krzywych w płaszczyźnie skończonej,

- b) $\frac{\partial w}{\partial n} = W$ na σ , gdzie W jest znaną funkcją,
 c) w ma ciągłe drugie pochodne zewnątrz σ ,
 d) $\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial w}{\partial n} - jkw \right) = 0$, gdzie r — odległość od dowolnego punktu stałego w płaszczyźnie skończonej.

Należy wykazać, że jeżeli funkcja w spełniająca te cztery warunki istnieje, to jest ona jednoznaczna.

Założmy, że istnieją dwie różne funkcje w_1 i w_2 , które spełniają powyższe warunki i niech

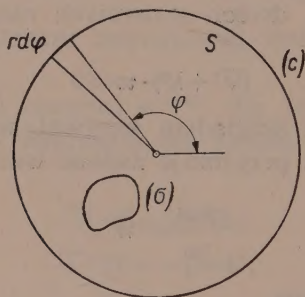
$$v = w_1 - w_2, \quad (16)$$

oraz

$$v^* = w_1^* - w_2^*, \quad (17)$$

gdzie gwiazdka oznacza wielkość zespoloną sprzężoną.

Oznaczmy przez c koło, które całkowicie obejmuje krzywą σ (rys. 3).



Rys. 3

Wówczas zgodnie z twierdzeniem Greena

$$\int_S [v \nabla^2 v^* - v^* \nabla^2 v] dS = \int_C \left(v \frac{\partial v^*}{\partial n} - v^* \frac{\partial v}{\partial n} \right) dC, \quad (18)$$

gdzie

$$C = c + \sigma.$$

Wobec założenia a) funkcja podcałkowa po lewej stronie równania (18), znika w S ; pozostaje więc

$$\int_{\sigma} \left(v \frac{\partial v^*}{\partial n} - v^* \frac{\partial v}{\partial n} \right) d\sigma + \int_C \left(v \frac{\partial v^*}{\partial n} - v^* \frac{\partial v}{\partial n} \right) dC = 0. \quad (19)$$

Uwzględniając następnie założenie b) i definicję v , dochodzimy do wnio-

sku, że pierwsza całka w równaniu (19) również równa się zeru, co daje ostatecznie

$$\int_C \left(v \frac{\partial v^*}{\partial r} - v^* \frac{\partial v}{\partial r} \right) r d\varphi = 0. \quad (20)$$

Biorąc pod uwagę założenie c) możemy v i $\frac{\partial v}{\partial r}$ przedstawić w postaci szeregów Fouriera o absolutnej i jednostajnej zbieżności:

$$v = \sum_{-\infty}^{\infty} \Phi_n(r) e^{jn\varphi}, \quad (21)$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \sum_{-\infty}^{\infty} \Psi_n(r) e^{jn\varphi}, \quad (22)$$

gdzie, zgodnie z założeniami a) i d) [2],

$$\Phi_n(r) = a_n H_n^{(1)}(kr), \quad (23)$$

$$\Psi_n(r) = k a_n H_n^{(1)'}(kr). \quad (24)$$

Ponieważ szeregi (21) i (22) są absolutnie zbieżne, można napisać

$$v \frac{\partial v^*}{\partial r} - v^* \frac{\partial v}{\partial r} = k \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_n a_n^* e^{j(n-m)\varphi} (H_n^{(1)} H_m^{(2)'} - H_n^{(1)'} H_m^{(2)}). \quad (25)$$

Jednostajność zbieżności wyrażenia (25) względem φ pozwala całkę (20) zastąpić całkowaniem kolejnych członów szeregu. Jest oczywiste, że wyznik różny od zera otrzymamy tylko dla $n=m$, czyli

$$\int_C \left(v \frac{\partial v^*}{\partial r} - v^* \frac{\partial v}{\partial r} \right) dC = k \sum_{-\infty}^{\infty} a_n a_n^* (H_n^{(1)} H_n^{(2)'} - H_n^{(1)'} H_n^{(2)}) r \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi. \quad (26)$$

Lecz [1]

$$H_n^{(1)} H_n^{(2)'} - H_n^{(1)'} H_n^{(2)} = -\frac{4j}{\pi k r},$$

skąd

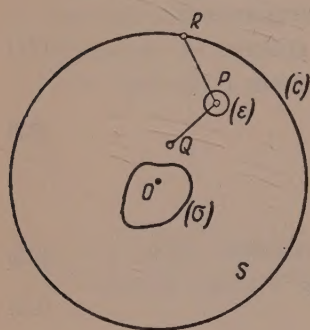
$$\int_C \left(v \frac{\partial v^*}{\partial r} - v^* \frac{\partial v}{\partial r} \right) dC = -8j \sum_{-\infty}^{\infty} a_n a_n^*. \quad (27)$$

Porównując z równaniem (20) dochodzimy do wniosku, że

$$\sum_{-\infty}^{\infty} a_n a_n^* = 0, \quad (28)$$

co wymaga, aby $a_n = 0$ dla każdego n .

Ostatecznie mamy $v=0$ na (c) — kole o dowolnym promieniu. Z drugiej strony wiemy, że rozwiązanie problemu wartości brzegowej, opisywanego eliptycznym równaniem różniczkowym cząstkowym, jest analityczne. Pozwala to na analityczne przedłużenie wyżej znalezionej funkcji v od największego koła całkowicie obejmującego σ do każdego punktu leżącego zewnątrz σ . W ten sposób udowodniliśmy jednoznaczność rozwiązania.



Rys. 4

Pozostaje jeszcze wykazać, że rozwiązanie w ogóle istnieje (dowód istnienia).

Korzystając z twierdzenia Greena wyprowadzimy równanie całkowe służące temu celowi i którego rozwiązanie jest jednocześnie rozwiązaniem problemu promieniowania walca ze szczeliny.

Rozpatrzmy rys. 4, na którym krzywa (σ) przedstawia granicę przekroju walca, (c) jest kołem o dowolnie dużym promieniu i środkiem wewnątrz σ i wreszcie (ϵ) — koło o dowolnie małym promieniu i środkiem w punkcie P.

Punkt R jest dowolnym punktem na kole (c), podczas gdy punkty P i Q — dowolne punkty w obszarze ograniczonym przez (σ) i (c). Pole S jest ograniczone krzywą (C) = (c) + (σ) + (ϵ). Niech $W(P)$ oznacza szukane rozwiązanie spełniające równania (13), (14) i (15). Wprowadzamy nową funkcję $u(P, Q)$ określoną jako

$$u(P, Q) = \frac{1}{4j} H_0^{(1)}(kr_{PQ}), \quad (29)$$

gdzie $H_0^{(1)}$ — funkcja Hankela 1. rodzaju i zerowego rzędu. Umawiamy się traktować punkt P jako stały, punkt zaś Q jako zmienny.

Funkcja $u(P, Q)$ spełnia oczywiście równania (13) i (15) w S.

Stosując twierdzenie Greena w naszym przypadku, mamy

$$\int_S (w \nabla^2 u - u \nabla^2 w) dS = \int_C \left(w \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial w}{\partial n} \right) dC. \quad (30)$$

Całka powierzchniowa \int_S znika, gdyż zarówno W jak i u spełniają równanie falowe. Prawą stronę można napisać jako

$$\int_C = \int_c + \int_\sigma + \int_\epsilon. \quad (31)$$

Jeżeli promień koła (ϵ) dąży do zera, to $\int_\epsilon \rightarrow -W(P)$ ze względu na pro-

stą osobliwość logarytmiczną $u(P, Q)$ gdy $Q \rightarrow P$. Z drugiej strony, gdy promień koła (c) dąży do nieskończoności, to $\int_c \rightarrow 0$, ponieważ zarówno

W jak i u spełniają warunek promieniowania. W rezultacie otrzymujemy

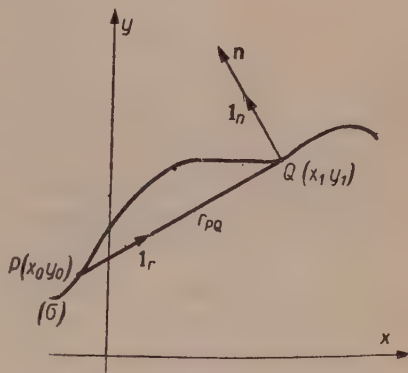
$$-w(P) = \int_{\sigma} u(P, Q) \frac{\partial}{\partial n} w(Q) d\sigma - \int_{\sigma} w(Q) \frac{\partial}{\partial n} u(P, Q) d\sigma. \quad (32)$$

Należy zauważyć, że w równaniu tym wektor $\mathbf{1}_n$ skierowany jest do obszaru objętego krzywą (σ). Jeżeli więc zgodnie z poprzednio stosowaną konwencją odwracamy kierunek dodatniej normali, mamy zamiast równania (32), równanie

$$\begin{aligned} w(P) &= \int_{\sigma} u(P, Q) W d\sigma - \int_{\sigma} w(Q) \frac{\partial}{\partial n} u(P, Q) d\sigma = \\ &= G(P) - \int_{\sigma} w(Q) \frac{\partial}{\partial n} u(P, Q) d\sigma, \end{aligned} \quad (33)$$

gdzie, uwzględniając warunek b), możemy traktować $G(P)$ jako znaną funkcję położenia. Otrzymana zależność (33) stanowi równanie całkowe, którego rozwiązanie daje szukaną funkcję.

Warto podkreślić, że jeżeli funkcja $W(Q)$ jest znana na powierzchni walca, równanie całkowe (33) może służyć do bezpośredniego obliczenia jej w całym obszarze zewnątrz (σ). Zagadnienie rozwiązania sprowadza się więc do rozpatrzenia równania (33), gdy punkt P zbliża się do krzywej σ . Wykażemy niżej, że problem wartości brzegowej odpowiadający równaniu (33) daje się sprowadzić do rozwiązania równania całkowego Fredholma drugiego rodzaju z ciągłym kérnelem.



Rys. 5

Rysunek 5 odpowiada przypadkowi, gdy punkt P znajduje się na krzywej σ . Kernel występujący w równaniu (33) można napisać jako

$$\frac{\partial}{\partial n} u(P, Q) = \frac{\partial}{\partial r_{P,Q}} u(P, Q) \frac{\partial r_{P,Q}}{\partial n}. \quad (34)$$

Otóż zgodnie z definicją $u(P, Q)$

$$\frac{\partial}{\partial r_{P,Q}} u(P, Q) = -\frac{k}{4j} H_1^{(1)}(kr_{P,Q}) = \frac{1}{2\pi r_{P,Q}} + \text{człony wyższych rzędów}. \quad (35)$$

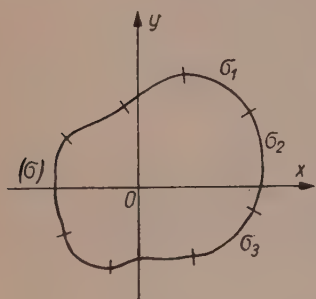
Jednocześnie

$$\frac{\partial r_{P,Q}}{\partial n} = \mathbf{1}_r \cdot \mathbf{1}_n. \quad (36)$$

Łatwo się przekonać, że w tych warunkach

$$\lim_{\partial n} \frac{\partial}{\partial n} u(P, Q) = -\frac{1}{4\pi\varrho_Q}, \quad (37)$$

gdzie ϱ_Q — promień krzywizny krzywej σ w punkcie Q . A więc kernel (34) dąży do granicy, gdy $P \rightarrow Q$ i możemy go określić w Q tak, że jest on w tym punkcie ciągły. Lecz to oznacza ciągłość kernela wzdłuż całej



Rys. 6

krzywej σ . Ponieważ funkcja $u(P, Q)$ ma prostą osobliwość logarytmiczną gdy $P \rightarrow Q$, $G(P)$ jest ciągłą dla każdej W ciągłej [2] lub odcinkowo ciągłej. Aby się przekonać, że powyższe rozszerzenie na funkcje W odcinkowo ciągłe jest słuszne, wystarczy podzielić krzywą σ na skończoną ilość części, wzdłuż których W jest ciągła (rys. 6). Wówczas $G(P)$ jest skończoną sumą funkcji ciągłych, a więc nadal jest ciągła.

Można udowodnić, że oba człony po prawej stronie równania (33) są ciągłe, jeżeli punkt P leży zewnątrz krzywej σ . Z tego jednak nie wynika, że są one nadal ciągłe w obszarze zamkniętym, składającym się z obszaru zewnętrznego i krzywej σ . W rzeczywistości, drugi człon prawej strony równania (33) ma skończoną nieciągłość, gdy P osiąga krzywą σ , podczas gdy $G(P)$ pozostaje ciągła w tych samych warunkach.

Wprowadzamy następujące oznaczenia

$$\kappa(P) = \int_{\sigma} w(Q) \frac{\partial}{\partial n} u(P, Q) d\sigma,$$

$\kappa_1(P) = \kappa(P)$ obliczona dla punktu zewnętrznego względem σ ,

$\kappa_1(P_0) = \lim \kappa_1(P)$ gdy $P \rightarrow P_0$ leżącego na σ ,

$\kappa(P_0) = \kappa(P)$ obliczona dla punktu P_0 leżącego na σ .

Stosując podobne oznaczenia dla funkcji $w(P)$ i $G(P)$ mamy następujące zależności [2]

$$\kappa_1(P_0) = \kappa(P_0) - \frac{1}{2} w(P_0) \quad (38)$$

$$G_1(P_0) = G(P_0). \quad (39)$$

Dla punktu P leżącego zewnątrz krzywej σ możemy zamiast równania (33) napisać

$$w_1(P) = G_1(P) - \kappa_1(P), \quad (40)$$

natomiast gdy punkt $P \rightarrow P_0$ na krzywej σ

$$w_1(P_0) = G_1(P_0) - \kappa_1(P_0), \quad (41)$$

co po uwzględnieniu równań (38) i (39) przybiera postać

$$w_1(P_0) = G(P_0) - \kappa(P_0) + \frac{1}{2} w(P_0). \quad (42)$$

Z drugiej jednak strony wymagamy aby $w_1(P_0) = w(P_0)$. Wprowadzając to wymaganie do równania (42) otrzymujemy

$$w(P_0) = 2G(P_0) - 2\kappa(P_0). \quad (43)$$

Rozwiązanie tego ostatniego równania daje wartości $w(P)$ na krzywej σ , Wprowadzając parametryczne równania krzywej σ

$$\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \end{aligned} \quad a \leq t \leq b \quad (44)$$

do równania całkowego (43) możemy je napisać w postaci

$$w(t) = g(t) + \int_a^b K(t, \tau) w(\tau) d\tau, \quad (45)$$

gdzie funkcje $g(t)$ oraz $K(t, \tau)$ są ciągłe. Widzimy, że jest to równanie całkowe Fredholma drugiego rodzaju. Wystarczy teraz udowodnić, że $+1$ nie jest stałą charakterystyczną równania całkowego (45) aby tym samym przeprowadzić dowód istnienia rozwiązania problemu. Wiemy bowiem z teorii równań całkowych Fredholma, że mamy wówczas ciągłe rozwiązanie $w(t)$ dla dowolnej odcinkowo ciągłej zadanej funkcji W . Przedłużenie analityczne tej funkcji $w(t)$ do obszaru zewnętrznego względem σ za pomocą równania (33) daje ostatecznie jednoznaczne rozwiązanie ciągłe problemu wartości brzegowej.

Aby wykazać, że $+1$ nie jest stałą charakterystyczną, rozpatrzmy równanie jednorodne, odpowiadające równaniu (45):

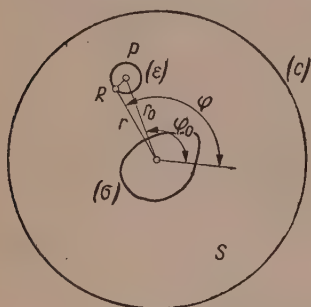
$$w(t) = \int_a^b K(t, \tau) w(\tau) d\tau. \quad (46)$$

Otrzymujemy je zakładając, że zadana funkcja $W=0$. Otóż, jeżeli ma istnieć dla tego równania rozwiązanie $w(t) \neq 0$, to musi ono mieć tę wła-

ność, że jej przedłużenie analityczne w obszarze zewnętrznym względem σ poprzez równanie (33) musi prowadzić do funkcji identycznie równej zeru. Wynika to bowiem z poprzednio udowodnionej jednoznaczności rozwiązania. Uwzględniając jednak fakt, że $w(P)$ jest ciągła gdy $P \rightarrow P_0$ na krzywej σ , mamy $w(P_0)=0$, a więc $w(t)=0$.

Należy jednak podkreślić, że otrzymany wyżej wynik nie wyklucza możliwości istnienia niepromieniującego rozkładu prądu na powierzchni walca. Oznacza on jedynie, że taki rozkład prądu nie jest rozwiązaniem równania całkowego (45). Co więcej, można łatwo wyprowadzić równanie całkowe dla takich niepromieniujących rozkładów prądu, zakładając po prostu $\kappa_1(P_0)=0$, co daje

$$w(t) = -g(t) - \int_{\sigma}^b K(t, \tau) w(\tau) d\tau. \quad (47)$$



Rys. 7

Równanie to prowadzi jedynie do niepromieniujących rozkładów prądu. Na zakończenie warto zwrócić uwagę na bezpośredni związek między rozpatrywanym problemem anteny szczelinowej opisanym równaniami (13), (14) i (15) a odpowiadającym temu problemem dyfrakcyjnym. Łatwo się bowiem przekonać, że rozwiązanie odpowiedniego zagadnienia dyfrakcyjnego jest właściwie funkcją Greena rozpatrywanego problemu anteny szczelinowej.

Niech funkcja W będzie rozwiązaniem naszego problemu anteny szczelinowej, spełniającym równania (13), (14) i (15). Z drugiej strony wprowadzamy funkcję f , spełniającą równanie falowe (13) w S (rys. 7), a także warunek promieniowania (15). Natomiast na krzywej σ mamy

$$\frac{\partial f}{\partial n} = 0. \quad (48)$$

Jednocześnie f ma jednostkowe źródło w punkcie r_0, φ_0 . Odpowiednią funkcją f będzie

$$f = \frac{1}{4j} H_0^{(1)}(k\rho) + F(r, \varphi), \quad (49)$$

gdzie F nie posiada osobliwości w (r_0, φ_0) , spełnia równanie falowe i warunek promieniowania, a jednocześnie umożliwia spełnienie warunku (48).

Stosujemy twierdzenie Greena dla funkcji w i f

$$\int_S (w \nabla^2 f - f \nabla^2 w) dS = \int_C \left(w \frac{\partial f}{\partial n} - f \frac{\partial w}{\partial n} \right) dC, \quad (50)$$

gdzie $C = c + \sigma + \varepsilon$. Gdy promień koła (c) dąży do nieskończoności $\int_s \rightarrow 0$ oraz $\int_c \rightarrow 0$. Jednocześnie

$$\lim_{\varepsilon} \int = -w(P) \quad \text{gdy promień koła } (\varepsilon) \rightarrow 0.$$

Pozwala to, zamiast równania (50) napisać

$$w(P) = - \int_{\sigma} f \frac{\partial w}{\partial n} d\sigma = \int_{\sigma} f W d\sigma, \quad (51)$$

gdzie zmiana znaku wynika z założonej konwencji dodatniego kierunku normali w równaniu (14).

Równanie (51) umożliwia bezpośrednie obliczenie rozwiązania problemu anteny szczelinowej, jeżeli znamy rozwiązanie odpowiedniego problemu dyfrakcyjnego. I tak, w przypadku bardzo wąskiej szczeliny można założyć, że W jest funkcją impulsową; wówczas równanie (51) staje się zwykłą równością i całkowanie jest zbędne. Równanie (51) jest oczywiście po prostu sformułowaniem zasady wzajemności dla rozpatrywanego zagadnienia:

Jeżeli jednostkowe źródło na walcu wywołuje pole magnetyczne $w(P)$ w punkcie P , to jednostkowe źródło w punkcie P daje pole magnetyczne (przepływ prądu) $w(P)$ na walcu.

Należy zaznaczyć, że dla większości postaci przekrojów wyznaczenie rozwiązania problemu dyfrakcyjnego może się okazać nie mniej trudne niż bezpośrednie rozwiązanie problemu anteny szczelinowej. Tym niemniej rozpatrzenie dyfrakcji fali płaskiej, odpowiadające przesunięciu punktu P do nieskończoności, prowadzi do bezpośredniego wyznaczenia charakterystyki promieniowania pola dalekiego bez potrzeby jednoczesnego obliczania pola bliższego, co w niektórych wypadkach może stanowić pewną zaletę.

WYKAZ LITERATURY

1. Jahnke E., Emde F.: *Tables of functions*, Dover N. Y. 1945.
2. Sobolew S. L.: *Uraunienija matematiczeskoj fiziki*, Moskwa 1954.
3. Sommerfeld A.: *Vorlesungen über theoretische Physik*, Band VI, Wiesbaden 1947.
4. Stratton J. A. *Electromagnetic theory*, N. Y. 1941.

ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ ИЗЛУЧЕНИЯ ЗАЗОРА В ЦИЛИНДРЕ ПРОИЗВОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ

В статье приведены некоторые основные положения теории щелевой системы. Вопрос сводится к двумерной проблеме частного решения одиночной скалярной функции, удовлетворяющей волновое уравнение. Приведено доказа-

тельство существования и однозначности решения и выведено интегральное уравнение, которое должно удовлетворяться упомянутым решением.

Дана связь рассматриваемого вопроса с соответственной дифракционной проблемой, что в некоторых случаях может помочь в нахождении искомой характеристики излучения.

GENERAL SOLUTION TO PROBLEM OF RADIATING SLOT OF ARBITRARY CROSS SECTION IN A CYLINDER

The work is concerned with some basic aspects of slot antenna theory. In fact, it comes to the solution of two-dimensional problem of boundary value in respect to the single scalar quantity satisfying wave equation. Proof is given that a solution exists and it is unequivocal. Integral equation which subsequently is being derived satisfies the above solution.

Association of considered problem with corresponding diffraction problem is quoted. This may assist in some cases to determine the radiation characteristic.

538.566:621.392.26

P. SZULKIN

Susceptancja przeszkody kołowej w falowodzie kołowym pobudzonym modem TE_{01}

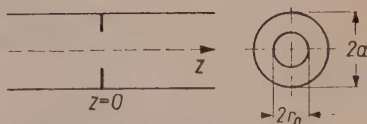
Rękopis dostarczono 12. 10. 1960

Praca zajmuje się teoretyczną analizą susceptancji kołowej przeszkody w falowodzie dla dominującego modu kołowo-elektrycznego. Stosując zasadę wariacyjną uzyskano wyrażenia susceptancji z odgórnym i oddolnym ograniczeniem dla dwuczłonowych funkcji próbnych, reprezentujących poprzeczne pole magnetyczne względnie pole elektryczne.

Rozpatrzmy falowód kołowy pobudzony dominującym modem TE_{01} i zawierającym symetryczną przeszkodę, której grubość jest znikomo mała, przewodność zaś — nieskończona (rys. 1). Przeszkoda jest więc płaska i ma symetrię kołową. W tych warunkach wyższe mody tłumione wywołane przez nieciągłość przeszkody mogą mieć jedynie postać modów kołowo-elektrycznych wyższych rzędów. Energia zmagazynowana w tych wyższych modach jest całkowicie magnetyczna. Wobec tego przeszkodę kołową można przedstawić jako indukcyjność bocznikującą przy zastoso-

sowaniu pojęcia równoważnej linii długiej. Ogólna metoda wyznaczania znormalizowanej susceptancji cienkiej przeszkody za pomocą zasady wariacyjnej jest dobrze znana (patrz np. [1], [4]. Dokładność otrzymanych wyników teoretycznych zależy jednak w dużym stopniu od charakteru założonego pola próbnego. Doświadczenie uczy, że obliczanie znormalizowanej susceptancji wymaga ogromnego nakładu pracy, co praktycznie ogranicza postać funkcji próbnej najwyżej do sumy dwóch członów. Problem kołowej przeszkody rozpatrzmy w dwóch aspektach, z których jeden operuje sformułowaniem wariacyjnym z ograniczeniem dolnym, natomiast drugi zawiera sformułowanie wariacyjne z ograniczeniem górnym.

Za pomocą stycznego pola magnetycznego (lub prądu) na przeszkodzie można wyprowadzić wyrażenie dla susceptancji przeszkody, będącej granicą dolną dla wartości rzeczywistej. Jako funkcję próbną obieramy



Rys. 1

sumę dwóch członów: jeden jest niezakłóconym rozkładem prądu na przeszkodzie bez apertury, drugi zaś stanowi człon korekcyjny. Powyższe graniczne wyrażenie oddolne daje susceptancje, które są dostatecznie ściśle dla bardzo małych apertur.

Znormalizowaną susceptancję, która może służyć jako granica górna wartości rzeczywistych dla przeszkody kołowej, otrzymujemy za pomocą stycznego pola elektrycznego w aperturze przeszkody. Przy granicznym sformułowaniu odgórnym zastosujemy dwie różne funkcje próbne. Jedną z tych funkcji próbnych jest sumą dwóch członów: pola elektrycznego w aperturze, gdy promień jej zbliża się do promienia falowodu oraz członu korekcyjnego. Teoretyczne wartości susceptancji, które uzyskuje się w ten sposób, są dostatecznie ściśle dla przeszkód o dużych aperturach.

Druga funkcja próbna również składa się z dwóch członów, reprezentujących pole elektryczne w aperturze i dobiera się tak, aby w odpowiedni sposób spełnić warunki brzegowe w nieciągłości, którą jest przeszkoda.

Wiadomo, że problem przeszkody w falowodzie znacznie się upraszcza, jeśli przyjmie się reprezentację nieciągłości w postaci równoważnego parametru skupionego w odpowiedniej linii przesyłowej [2]. W tym celu wyrażamy składowe pola za pomocą napięć i prądów modowych. Uwzględniając okoliczność, że pobudzenie i przeszkoda są symetryczne, w rachubę wchodzi jedynie mody kołowo-elektryczne. Przyjmując harmoniczną zależność czasową ($e^{j\omega t}$) można składowe pola modów kołowo-elektrycznych wyrazić w funkcji napięć i prądów modowych w sposób następujący

$$E_r = 0,$$

$$E_\varphi = \frac{J_1\left(\frac{r}{a} \varrho_n\right)}{a\sqrt{\pi J_0(\varrho_n)}} V_n(z) = e_n(r) V_n(z),$$

$$E_z = 0,$$

$$H_r = - \frac{J_1\left(\frac{r}{a} \varrho_n\right)}{a\sqrt{\pi J_0(\varrho_n)}} I_n(z) = h_n(r) I_n(z), \quad (1)$$

$$H_\varphi = 0,$$

$$H_z = - \frac{j\eta_0 \varrho_n J_0\left(\frac{r}{a} \varrho_n\right)}{ka^2 \sqrt{\pi J_0(\varrho_n)}} V_n(z),$$

gdzie

$$e_n(r) = -h_n(r) = \frac{J_1\left(\frac{r}{a} \varrho_n\right)}{a \sqrt{\pi J_0(\varrho_n)}},$$

a — promień falowodu kołowego,

$k = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ — liczba falowa próżni,

ϱ_n — n pierwiastek $J_1(x) = 0$,

$\eta_0 = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}$ — wewnętrzna admitancja próżni.

Podstawienie składowych pola wyrażonych równaniami (1) do równań Maxwella prowadzi do układu dwóch równań, których postać jest identyczna z równaniami klasycznymi linii długiej:

$$\frac{dV_n(z)}{dz} = -jk\zeta_0 I_n(z) = -j\gamma_n Z_{cn} I_m(z), \quad (2)$$

$$\frac{dI_n(z)}{dz} = \frac{-j\gamma_n^2}{k} \eta_0 V_m(z) = -j\gamma_n Y_{cn} V_n(z),$$

gdzie

$\zeta_0 = \frac{1}{\eta_0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$ — wewnętrzna impedancja próżni,

$\gamma_n = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\varrho_n}{a}\right)^2}$ — falowodowa liczba falowa.

Korzystając z analogii z linią długą, można określić charakterystyczną impedancję dla każdego modu.

Dla modów propagacyjnych charakterystyczna admitancja Y_{cn} i charakterystyczna impedancja Z_{cn} są wielkościami rzeczywistymi

$$Y_{cn} = \frac{1}{Z_{cn}} = \frac{\sqrt{k^2 - \left(\frac{\varrho_n}{a}\right)^2}}{\omega \mu_0}. \quad (3)$$

Natomiast dla modów tłumionych Y_{cn} i Z_{cn} są urojone i równe

$$Y_{cn} = \frac{1}{Z_{cn}} = \frac{-j \sqrt{\left(\frac{\varrho_n}{a}\right)^2 - k^2}}{\omega \mu_0}. \quad (4)$$

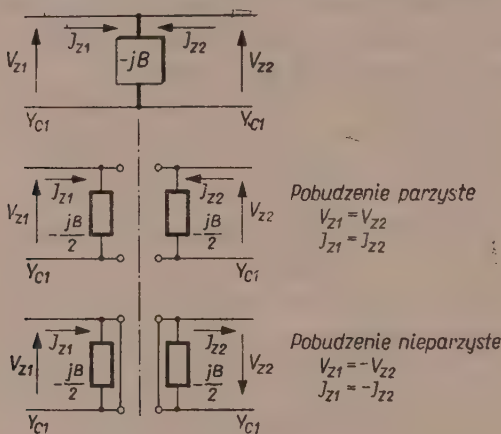
Cienkiej przeszkodzie kołowej odpowiada równoważna susceptancja bocznikująca B w linii transmisyjnej TE_{01} . Pole TE_{01} pobudzające przeszkodę jest dowolne, co pozwala je rozłożyć na składowe parzystą i nieparzystą. Przypadek parzysty wymaga zaniku w aperturze stycznego

pola magnetycznego, podczas gdy styczne pole elektryczne osiąga wartość maksymalną. Z drugiej strony, pobudzeniu nieparzystemu odpowiada zanik stycznego pola elektrycznego i wartość maksymalną stycznego pola magnetycznego w aperturze. Rozpatrując jedynie pobudzenie parzyste, mamy przy rozcięciu układu w sposób pokazany na rys. 2

$$Y_w = -j \frac{B}{2}, \quad (5)$$

gdzie

Y_w — admitancja widziana na zaciskach rozcięcia.



Susceptancję przeszkody można wyznaczyć, rozwiązując równania Maxwella w obszarze na lewo od przeszkody przy następujących warunkach brzegowych:

$$\begin{aligned} E_\varphi &= 0 & \text{dla } r &= a & -\infty < z < 0, \\ E_\varphi &= 0 & r_0 < r < a & & z = 0, \\ H_r &= 0 & 0 < r < r_0 & & z = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

gdzie

r_0 — promień apertury.

Problem można sformułować operując stycznym polem elektrycznym w aperturze lub stycznym polem magnetycznym na powierzchni przeszkody.

Równomierna struktura pola w kierunku φ pozwala wyrazić poprzeczne pole elektryczne jako sumę napięć modowych typu kołowo-elektrycznego. Podobną reprezentację za pomocą prądów modowych mamy dla poprzecznego pola magnetycznego. Z równań (1) wynika, że wielkości te są dane przez

$$E_t = E_\varphi(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} e_n(r) V_n(z). \quad (7)$$

$$H_t = H_r(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n(r) I_n(z).$$

Warunki ortogonalności pozwalają wyrazić amplitudy modowych napięć i prądów w postaci całek powierzchniowych w przekroju kołowego falowodu. W ten sposób otrzymujemy

$$V_n(z) = \int_S E_\varphi(r, z) e_n(r) dS, \quad (8)$$

$$I_n(z) = \int_S H_r(r, z) h_n(r) dS.$$

Zastosowanie warunku brzegowego o zaniku poprzecznego pola magnetycznego w aperturze prowadzi do zależności

$$I_1 h_1(r) = - \sum_{n=2}^{\infty} I_n h_n(r) \quad \begin{matrix} z=0 \\ 0 < r < r_0 \end{matrix} \quad (9)$$

Lewa strona tego równania przedstawia mod propagacyjny (dominujący mod kołowo-elektryczny), podczas gdy suma po prawej stronie składa się z członów wyższych modów, które powstają w nieciągłości przeszkody. Zakładamy, że te wyższe mody niepropagacyjne są całkowicie stłumione zanim osiągną ewentualną inną najbliższą nieciągłość.

Powyższe założenie jest równoważne obciążeniu każdego modu tłumionego jego urojoną admitancją charakterystyczną. Uwzględniając równanie linii długiej, wiążące V_n i I_n można równanie (9) napisać w postaci

$$I_1 h_1(r) = - \sum_{n=2}^{\infty} Y_{cn} V_n h_n(r) = \sum_{n=2}^{\infty} Y_{cn} h_n(r) \int_{\sigma} E_\varphi(r') h_n(r') d\sigma, \quad (10)$$

gdzie

σ — pole apertury.

Zmieniając kolejność sumowania i całkowania, otrzymujemy

$$I_1 h_1(r) = \int_{\sigma} G(r, r') E_\varphi(r') d\sigma, \quad (11)$$

gdzie funkcja $G(r, r')$ określona jest jako

$$G(r, r') = \sum_{n=2}^{\infty} Y_{cn} h_n(r) h_n(r'). \quad (12)$$

Równanie (11) jest oczywiście równaniem całkowym, w którym pole elektryczne apertury jest wielkością nieznaną. Gdybyśmy mogli z rozwiązania tego równania całkowego wyznaczyć $E_\varphi(r')$, otrzymanie szuka-

nej susceptancji nie przedstawiałoby większej trudności przy wykorzystaniu równań (5) i (8). Wynika stąd, że susceptancja przeszkody wyraża się wzorem

$$j \frac{B}{2} = \frac{1}{\int_{\sigma} E_{\varphi}(r) h_1(r) d\sigma} \quad (13)$$

Jednakże trudności związane z rozwiązaniem powyższego równania całkowego zmuszają nas do szukania wyrażenia aproksymacyjnego dla susceptancji przeszkody na drodze zastosowania zasady wariacyjnej. Mnożąc równanie (10) przez nieznanne pole w aperturze $E_{\varphi}(r)$, całkując w aperturze i dzieląc przez V_1^2 , otrzymujemy wariacyjne wyrażenie dla susceptancji przeszkody

$$-j \frac{B}{2} = \frac{\sum_{n=2}^{\infty} Y_{cn} \left[\int_{\sigma} E_{\varphi}(r) h_n(r) d\sigma \right]^2}{\left[\int_{\sigma} E_{\varphi}(r) h_1(r) d\sigma \right]^2} \quad (14)$$

Łatwo się przekonać, że powyższe wyrażenie susceptancji przeszkody jest stacjonarne względem małych zmian $E_{\varphi}(r)$ w odniesieniu do wartości rzeczywistej pola elektrycznego w aperturze. Jeżeli obrane pole próbne cechuje błąd 1 rzędu, otrzymana susceptancja będzie miała błąd najwyżej 2 rzędu. Jednocześnie gdybyśmy jako pole próbne wzięli rzeczywiste pole elektryczne w aperturze, uzyskamy na tej drodze minimalną wartość susceptancji. A więc powyższa metoda daje górną granicę przy obliczaniu susceptancji.

W podobny sposób można wyprowadzić dolną granicę operując rozkładem prądu na przeszkodzie. Oddolnie ograniczona susceptancja wyraża się wzorem

$$-j \frac{B}{2} = \frac{\left[\int_{\sigma} H_r(r) e_1(r) d\sigma \right]^2}{\sum_2^{\infty} Z_{cn} \left[\int_{\sigma} H_r(r) e_n(r) d\sigma \right]^2} \quad (15)$$

Przyjmijmy, że prąd na przeszkodzie (składowa styczna pola magnetycznego) da się wyrazić za pomocą dwóch członów. Pierwszy z nich — to prąd odpowiadający przypadkowi, gdy apertura dąży do zera, drugi zaś stanowi człon korekcyjny. Jako pole próbne obieramy dwa pierwsze człony zbioru funkcji Bessela o postaci

$$H_r(r) = J_1\left(\frac{r}{a} \varrho_1\right) + A J_1\left(\frac{r}{a} \varrho_2\right) \quad r_0 \leq r \leq a, \quad (16)$$

gdzie

A — stała, którą należy jeszcze wyznaczyć.

Oczywiście, obierając funkcję próbną w postaci sumy dużej liczby podobnych członów o nieokreślonych czasowo współczynnikach, mogliśmy chyba uzyskać rozwiązanie dowolnie bliskie ścisłego. Obliczone wyniki uzyskane przez wyznaczenie nieznanych współczynników tak, aby B było stacjonarne, muszą prowadzić do ścisłej wartości susceptancji przeszkody. Praktycznie jednak obliczenia stają się nadmiernie uciążliwe, gdy funkcja próbna składa się więcej niż z dwóch członów. Powyższa okoliczność skłania więc do ograniczenia się do dwuczłonowych funkcji próbnych przy praktycznych obliczeniach susceptancji przeszkody i to zarówno w wyrażeniach ograniczenia dolnego, jak górnego.

Podstawiając obrane pole $H_r(r)$ do równania (15) piszemy wyrażenie wariacyjne dla susceptancji przeszkody w następującej postaci

$$\frac{Ba}{Y_{cn}\lambda_g} = \frac{\left[\int_{r_0}^a J_1\left(\frac{r}{a} \varrho_1\right) \left\{ J_1\left(\frac{r}{a} \varrho_1\right) + A J_1\left(\frac{r}{a} \varrho_2\right) \right\} r dr \right]^2}{\pi J_0^2(\varrho_1) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\left[\int_{r_0}^a J_1\left(\frac{r}{a} \varrho_n\right) \left\{ J_1\left(\frac{r}{a} \varrho_1\right) + A J_1\left(\frac{r}{a} \varrho_2\right) \right\} r dr \right]^2}{J_0^2(\varrho_n) \sqrt{\varrho_n^2 - (ka)^2}}}. \quad (17)$$

Korzystając ze znanych wzorów [2], mamy

$$\int_{r_0}^a J_1\left(\frac{r}{a} \varrho_m\right) J_1\left(\frac{r}{a} \varrho_n\right) r dr = \frac{a^2 \tau}{\varrho_m^2 - \varrho_n^2} [\varrho_m J_0(\varrho_m \tau) J_1(\varrho_n \tau) - \varrho_n J_1(\varrho_m \tau) J_0(\varrho_n \tau)], \quad (18)$$

($m \neq n$)

$$\int_{r_0}^r J_1^2\left(\frac{r}{a} \varrho_m\right) = \frac{a^2 \tau}{2} \left\{ \tau [J_0(\varrho_m \tau) J_2(\varrho_m \tau) - J_1^2(\varrho_m \tau)] - \frac{J_0(\varrho_m) J_2(\varrho_m)}{\tau} \right\}, \quad (19)$$

gdzie

$$\tau = \frac{r_0}{a} = \frac{\text{promień apertury}}{\text{promień falowodu}}$$

Równanie (17) można uprościć pisząc

$$\int_{r_0}^a J_1\left(\frac{r}{a} \varrho_n\right) J_1\left(\frac{r}{a} \varrho_1\right) r dr + A \int_{r_0}^a J_1\left(\frac{r}{a} \varrho_n\right) J_1\left(\frac{r}{a} \varrho_2\right) r dr = a^2 \tau (\Phi_1 + A \Phi_2), \quad (20)$$

$$\int_{r_0}^a \left[J_1\left(\frac{r}{a} \varrho_1\right) \right]^2 r dr + A \int_{r_0}^a J_1\left(\frac{r}{a} \varrho_1\right) J_1\left(\frac{r}{a} \varrho_2\right) r dr = a^2 \tau (\Psi_1 + A \Psi_2). \quad (21)$$

Po wykonaniu odpowiedniego całkowania otrzymujemy

$$\Phi_1 = \frac{1}{\varrho_n^2 - \varrho_1^2} [\varrho_n J_0(\varrho_n \tau) J_1(\varrho_1 \tau) - \varrho_1 J_1(\varrho_n \tau) J_0(\varrho_1 \tau)] \quad n \geq 2, \quad (22)$$

$$\Phi_2 = \frac{1}{2} \left\{ \tau [J_0(\varrho_2 \tau) J_2(\varrho_2 \tau) - J_1^2(\varrho_2 \tau)] - \frac{J_0(\varrho_2) J_2(\varrho_2)}{\tau} \right\} \quad n = 2, \quad (23)$$

$$\Phi_2 = \frac{1}{\varrho_n^2 - \varrho_2^2} [\varrho_n J_0(\varrho_n \tau) J_1(\varrho_2 \tau) - \varrho_2 J_1(\varrho_n \tau) J_0(\varrho_2 \tau)] \quad n > 2,$$

$$\Psi_1 = \frac{1}{2} \left\{ \tau [J_0(\varrho_1 \tau) J_2(\varrho_1 \tau) - J_1^2(\varrho_1 \tau)] - \frac{J_0(\varrho_1) J_2(\varrho_1)}{\tau} \right\}, \quad (24)$$

$$\Psi_2 = \frac{1}{\varrho_2^2 - \varrho_1^2} [\varrho_2 J_0(\varrho_2 \tau) J_1(\varrho_1 \tau) - \varrho_1 J_1(\varrho_2 \tau) J_0(\varrho_1 \tau)]. \quad (25)$$

Podstawiając powyższe wyrażenia do równania (17) mamy

$$\frac{Ba}{Y_{c1} \lambda_g} = \frac{(1+c)^2}{\pi J_0^2(\varrho_1) \sum_2^{\infty} \frac{\left(\frac{\Phi_1}{\Psi_1} + c \frac{\Phi_2}{\Psi_2} \right)^2}{J_0^2(\varrho_n) \sqrt{\varrho_n^2 - (ka)^2}}} \quad (26)$$

gdzie

$$C = A \frac{\Psi_2}{\Psi_1} \quad (27)$$

jest stałą, którą należy wyznaczyć.

Wprowadźmy jeszcze następujące wielkości

$$b_0 = \pi J_0^2(\varrho_1) \sum_2^{\infty} \frac{\left(\frac{\Phi_1}{\Psi_1} \right)^2}{J_0^2(\varrho_n) \sqrt{\varrho_n^2 - (ka)^2}}, \quad (28)$$

$$b_1 = \pi J_0^2(\varrho_1) \sum_2^{\infty} \frac{\frac{\Phi_1 \Phi_2}{\Psi_1 \Psi_2}}{J_0^2(\varrho_n) \sqrt{\varrho_n^2 - (ka)^2}}, \quad (29)$$

$$b_2 = \pi J_0^2(\varrho_1) \sum_2^{\infty} \frac{\left(\frac{\Phi_2}{\Psi_2} \right)^2}{J_0^2(\varrho_n) \sqrt{\varrho_n^2 - (ka)^2}}. \quad (30)$$

Pozwala to wyrazić znormalizowaną susceptancję wzorem

$$\frac{Ba}{Y_{c1} \lambda_g} = \frac{(1+c)^2}{b_0 + 2cb_1 + c^2 b_2}. \quad (31)$$

Warunkiem stacjonarności susceptancji względem dowolnego współczynnika c jest $\frac{\partial B}{\partial c} = 0$, co uwzględniając równanie (31) daje

$$c = \frac{b_1 - b_0}{b_1 - b_2} \quad (32)$$

i

$$\frac{Ba}{Y_{c1}\lambda_g} = \frac{1}{b_0 - \frac{(b_1 - b_0)^2}{b_0 + b_2 - 2b_1}} \quad (\text{pierwszego rzędu}) \quad (33)$$

dla dwuczłonowej funkcji próbnej.

Obierając jednoczłonową funkcję próbną ($c=0$), otrzymamy wyrażenie susceptancji

$$\frac{Ba}{\lambda_g Y_{c1}} = \frac{1}{b_0} \quad (\text{zerowego rzędu}). \quad (34)$$

Łatwo sprawdzić, że wielkość $\frac{(b_1 - b_0)^2}{b_0 + b_2 - 2b_1}$ występująca w mianowniku równania (33), jest dodatnia. A więc susceptancja odpowiadająca dwuczłonowej funkcji próbnej jest większa od susceptancji wyznaczonej za pomocą tylko pierwszego członu.

Korzystając z równania (27) można obliczyć współczynnik A , dający maksymalną susceptancję dla obranej funkcji próbnej i po podstawieniu do równania (16) otrzymujemy ostatecznie

$$H_r(r) = J_1\left(\frac{r}{a} \varrho_1\right) + \frac{b_1 - b_0}{b_1 - b_2} \frac{\Psi_1}{\Psi_2} J_1\left(\frac{r}{a} \varrho_2\right). \quad (35)$$

Przechodząc do wariacyjnego sformułowania z ograniczeniem ogólnym dla znormalizowanej susceptancji kołowej przeszkody, zastosujemy dwie różne funkcje próbne.

Pierwsza z nich składa się z niezakłóconego pola elektrycznego w aperturze i członu korekcyjnego. Tak obrane pole, które jest dostatecznie ściśle dla susceptancji przeszkód o dużej aperturze (tj. małym zakłóceniu pola padającego) ma postać

$$E_\varphi(r) = J_1\left(\frac{r}{r_0} \varrho_1\right) + DJ_1\left(\frac{r}{r_0} \varrho_2\right) \quad 0 \leq r \leq r_0 \quad (36)$$

Funkcja ta spełnia warunek brzegowy wymagający zaniku pola elektrycznego wzdłuż osi $r=0$ i dla $r=r_0$.

Podstawienie równania (36) do (14) pozwala wyrazić susceptancję w postaci

$$\frac{Ba}{Y_{c1}\lambda_g} = \frac{J_0^2(\varrho_1) \sum_2^{\infty} \sqrt{\varrho_n^2 - (ka)^2} \left[\int_0^{r_0} J_1\left(\frac{r}{a} \varrho_n\right) \left\{ J_1\left(\frac{r}{r_0} \varrho_1\right) + DJ_1\left(\frac{r}{r_0} \varrho_2\right) \right\} r dr \right]^2}{\pi \left[\int_0^{r_0} J_1\left(\frac{r}{a} \varrho_1\right) \left\{ J_1\left(\frac{r}{r_0} \varrho_1\right) + DJ_1\left(\frac{r}{r_0} \varrho_2\right) \right\} r dr \right]^2} \quad (37)$$

Wykonując odpowiednie całkowania przy wykorzystaniu wzorów (18) i (19) można wyrażeniu susceptancji nadać prostą postać

$$\frac{Ba}{Y_{c1}\lambda_g} = \frac{h_0 + 2gh_1 + g^2h_2}{(1+g)^2}, \quad (38)$$

gdzie

$$H_i = \frac{(\tau^2 - 1)^{2-i} (\tau^2 - \gamma^2)^i J_0^2(\varrho_1)}{\pi J_1^2(\varrho_1 \tau)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{\varrho_n^2 - (ka)^2} J_1^2(\varrho_n \tau)}{J_0^2(\varrho_n) (\kappa_n^2 - 1)^{2-i} (\kappa_n^2 - \gamma^2)^i} \quad i = 0, 1, 2, \quad (39)$$

$$g = D \frac{J_0(\varrho_2)}{\gamma J_0(\varrho_1)}, \quad (40)$$

$$\gamma = \frac{\varrho_2}{\varrho_1}, \quad (41)$$

$$\kappa_n = \frac{\varrho_n \tau}{\varrho_1}. \quad (42)$$

Współczynnik g odpowiadający minimalnej susceptancji dla obranej funkcji próbnej jest

$$g = \frac{h_1 - h_0}{h_1 - h_2}, \quad (43)$$

co po podstawieniu do równania (38) daje

$$\frac{Ba}{Y_{c1}\lambda_g} = h_0 - \frac{(h_1 - h_0)^2}{h_0 + h_2 - 2h_1} \quad (\text{pierwszego rzędu}) \quad (44)$$

dla obranej dwuczłonowej funkcji próbnej.

Jeżeli jako funkcję obieramy pole niezakłócone $E_\varphi(r) = J_1\left(\frac{r}{r_0} \varrho_1\right)$ susceptancja (indukcyjna) wyraża się wzorem

$$\frac{Ba}{Y_{c1}\lambda_g} = h_0 \quad (\text{zerowego rzędu}). \quad (45)$$

Łatwo się przekonać, że $\frac{(h_1 - h_0)^2}{h_0 + h_2 - 2h_1}$ jest wielkością dodatnią, co wska-

zuje, że susceptancja pierwszego rzędu (równanie 44) jest mniejsza od susceptancji zerowego rzędu (równanie 45). Ostatecznie, funkcja próbna z równania (36) z D odpowiadającym minimalnej susceptancji dla obranej funkcji próbnej przybiera postać

$$E_q(r) = J_1 \left(\frac{r}{r_0} \varrho_1 \right) + \frac{h_1 - h_0}{h_1 - h_2} \gamma \frac{J_0(\varrho_1)}{J_0(\varrho_2)} J_1 \left(\frac{r}{r_0} \varrho_2 \right). \quad (46)$$

Dotychczas operowaliśmy funkcjami próbnymi, co do których można się spodziewać, że dadzą one dostatecznie ścisłe wartości susceptancji przeszkód o bardzo małych lub bardzo dużych aperturach.

Rozpatrzmy jeszcze zastosowanie w równaniu (14) funkcji próbnej, będącej aproksymacją elektrycznego pola w aperturze, odpowiadającą rozwiązaniu quasistatycznemu. Szczególną postać funkcji obieramy jednak tak, aby całki w wyrażeniu wariacyjnym można było obliczyć bez większych trudności.

Funkcją próbną, która spełnia powyższe wymagania i spełnia warunki brzegowe, jest

$$E_\varphi(r) = r \sqrt{r_0^2 - r^2} + Q r^3 \sqrt{r_0^2 - r^2}. \quad (47)$$

Podstawiając tę funkcję do równania (14) otrzymujemy

$$\frac{B_a}{Y_{c1} \lambda_g} = \frac{J_0^2(\varrho_1) \sum_2^\infty \frac{1}{\varrho_n^2 - (ka)^2} \left[\int_0^{r_0} J_1 \left(\frac{r}{a} \varrho_n \right) \left\{ r^2 \sqrt{r_0^2 - r^2} (1 + Q r^2) \right\} dr \right]^2}{\pi \left[\int_0^{r_0} J_1 \left(\frac{r}{a} \varrho_1 \right) \left\{ r^2 \sqrt{r_0^2 - r^2} (1 + Q r^2) \right\} dr \right]^2}. \quad (48)$$

Mamy tu do obliczenia całki o postaci

$$I = \int_0^{r_0} J_1 \left(\frac{r}{a} \varrho_n \right) r^m \sqrt{r_0^2 - r^2} dr \quad (49)$$

lub kładąc $r = r_0 \sin \theta$

$$I = r_0^{m+2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} J_1(\varrho_n \tau \sin \theta) \sin^m \theta \cos^2 \theta d\theta. \quad (50)$$

Wiadomo, że całki te wyrażają się wzorem [2].

$$I = \frac{\sqrt{2} r_0^{m+2} \Gamma \left(\frac{3}{2} \right)}{(\varrho_n \tau)^{3/2}} \frac{J_{\frac{m+1}{2}}(\varrho_n \tau)}{2}. \quad (51)$$

Wykorzystując te wzory można wyrazić poszukiwaną susceptancję w postaci

$$\frac{Ba}{Y_{c1}\lambda_g} = \frac{w_0 + 2pw_1 + p^2w_2}{(1+p)^2}, \quad (52)$$

gdzie

$$p = Q\tau_0^2 \frac{J_{9/2}(\varrho_1\tau)}{J_{5/2}(\varrho_1\tau)}, \quad (53)$$

$$w_i = \frac{J_0^2(\varrho_1) \varrho_1^3 [J_{5/2}(\varrho_1\tau)]^i}{\pi [J_{9/2}(\varrho_1\tau)]^i} \sum_2^{\infty} \frac{\sqrt{\varrho_n^2 - (ka)^2} [J_{5/2}(\varrho_n\tau)]^{2-i}}{J_0^2(\varrho_n) \varrho_n^3 [J_{5/2}(\varrho_1\tau)]^{2-i}} \quad i=0,1,2. \quad (54)$$

Podobnie jak w poprzednich przypadkach, współczynnik p wyznaczamy różniczkując równanie (52) względem p i przyrównując wynik do zera. Daje to

$$p = \frac{w_1 - w_0}{w_1 - w_2}, \quad (55)$$

co po podstawieniu do równania (52) prowadzi do następujących wyrażeń susceptancji:

$$\frac{Ba}{Y_{c1}\lambda_g} = w_0 - \frac{(w_1 - w_0)^2}{w_0 + w_2 - 2w_1} \quad (\text{pierwszego rzędu}) \quad (56)$$

i

$$\frac{Ba}{\lambda_g Y_{c1}} = w_0 \quad (\text{zerowego rzędu}). \quad (57)$$

Funkcja próbna z równania (47) z dobranym współczynnikiem p , odpowiadającym minimalnej susceptancji (dla tak obranej funkcji próbnej) przybiera ostatecznie postać

$$E_\varphi(r) = \left[1 + \frac{w_1 - w_0}{w_1 - w_2} \frac{J_{5/2}(\varrho_1\tau)}{J_{9/2}(\varrho_1\tau)} \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right] \frac{r}{r_0} \sqrt{r_0^2 - r^2}. \quad (58)$$

WYKAZ LITERATURY

- [1] Borguis F. E., Papas Ch. H.: *Randwertprobleme der Mikrowellen physik*, Berlin 1955.
- [2] Marcuvitz N.: *Waveguide Handbook* vol. 10. Radiation Lab. Series New York 1951.
- [3] Gradsztein I., Ryzik I.: *Tablica integralow, sum riadow i proizwidenij*. Moskwa 1951.
- [4] Szulkin P.: O pewnych podstawowych zagadnieniach teorii analizy nieciągłości w falowodach III Symp. Teorii Pola Elektromagn. Szklarska Poręba 1959.

РЕАКТИВНАЯ ПРОВОДИМОСТЬ КОЛЬЦЕВОГО ПРЕПЯТСТВИЯ
В КРУГОВОМ ВОЛНОВОДЕ ВОЗБУЖДЕННОМ МОДОМ TE_{01}

Предметом работы является теоретический анализ реактивной проводимости кольцевого препятствия в волноводе для преобладающего кругового электрического мода. При применении вариационного расчета получены выражения для реактивной проводимости с верхним нижним предельным ограничением для двухчленных испытательных функций отображающих поперечное магнитное поле или электрическое поле.

SUSCEPTANCE OF CIRCULAR OBSTACLE IN CIRCULAR WAVEGUIDE
INDUCED BY MODE TE_{01}

The paper gives an account of theoretical analysis of the circular obstacle susceptance in the waveguide induced by dominant circular-electrical mode. Variational method has been used to derive the expression for susceptance with upper and lower bounds for binomial test functions representing either transversal magnetic field or electric field.

P. SZULKIN I B. KACPRZYŃSKI

621.392.52

Analiza biernych układów elektrycznych wielooczkowych z elementami nieliniowymi

Rękopis dostarczono 22. 8. 1960

W pracy przeprowadzono analizę filtra pasmowo-przepustowego z nieliniową pojemnością rozwiązując bezpośrednio układ równań różniczkowych nieliniowych przybliżoną metodą uśrednienia Galerkina-Ritza. Poszukiwano rozwiązań tylko w stanie ustalonym, ograniczając się do aproksymacji jednoczłonowej. Otrzymane wyniki pokazują charakter zależności pasma przepuszczania od amplitudy sygnału, w zależności od charakterystyki elementu nieliniowego oraz fakt znikania niektórych częstotliwości rezonansowych filtra.

Badanie funkcji przenoszenia układów elektrycznych wielooczkowych, zawierających elementy nieliniowe, poprzez bezpośrednie rozwiązywanie układów równań różniczkowych natrafia na poważne trudności, wynikające z braku ogólnych metod rozwiązywania układów nieliniowych równań różniczkowych. Rozwiązywanie metodami przybliżonymi może w pewnych przypadkach już w pierwszym przybliżeniu dostarczyć wiele informacji o własnościach takich obwodów. Wydaje się, że przybliżona metoda Galerkina-Ritza, zastosowana przy rozwiązywaniu układów elektrycznych nieliniowych wielooczkowych, prowadzi najszybciej do użytecznych wyników.

Rozpatrzmy bierny układ elektryczny n -oczkowy o n stopniach swobody, dla którego znamy układ n równań różniczkowych liniowych lub nieliniowych, opisujących go za pomocą n uogólnionych współrzędnych (napięć, prądów, ładunków) i ich pochodnych:

$$F_t(q_1 \dots q_n, \dot{q}_1 \dots \dot{q}_n) = 0, \quad (1)$$

gdzie $i=1, 2 \dots n$.

Uogólnione współrzędne są nieznanymi funkcjami czasu, które chcemy wyznaczyć. Jeżeli dla tego układu elektrycznego możemy zastosować odpowiednio zmodyfikowaną zasadę Hamiltona, to z zasady tej wiemy, że ścisłe rozwiązanie równań różniczkowych problemu dynamicznego czyni stacjonarną całkę względem czasu odpowiedniej rozszerzonej funkcji Lagrange'a [1].

Pozwala to na sformułowanie następującego wniosku: Jeżeli założymy, że przybliżone rozwiązania dla uogólnionych współrzędnych będą

$$\left. \begin{aligned} q_1(t) &\approx \bar{q}_1(t) = \sum_{k=1}^{\bar{N}_1} a_{1k} \varphi_{1k}(t) \\ &\dots\dots\dots \\ q_i(t) &\approx \bar{q}_i(t) = \sum_{k=1}^{\bar{N}_i} a_{ik} \varphi_{ik}(t) \\ &\dots\dots\dots \\ q_n(t) &\approx \bar{q}_n(t) = \sum_{k=1}^{\bar{N}_n} a_{nk} \varphi_{nk}(t) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

podstawiamy je do całki $\int L dt$, to te wartości współczynników a_{ik} , które czynią tę całkę stacjonarną, będą optymalne w sensie bliskości aproksymacji rozwiązań $q_i(t)$, dla założonej postaci funkcji $\varphi_{ik}(t)$.

Oczywiście ta „optymalność” jest bardzo względna, ponieważ zależy od trudności wyboru funkcji $\varphi_{ik}(t)$ i od ilości członów wyrazów aproksymujących N_i .

Z dotychczasowych rozważań wynika, że punktem wyjściowym omawianej metody aproksymacji jest funkcja Lagrange’a problemu. Niejednokrotnie jednak nie znamy tej funkcji, lub wyznaczenie jej napotyka na duże trudności. Wygodniej jest stosować metodę uśrednienia, mającą tę zaletę, że znajomość funkcji Lagrange’a nie jest konieczna, o ile jesteśmy w stanie (obojętnie w jaki sposób) wyznaczyć równania różniczkowe problemu.

Wprowadzając tę metodę postępować będziemy tak, jak byśmy znali funkcję L , przyjmując najogólniejszą jej postać. Podstawiając założone $\bar{q}_i(t)$ do L otrzymujemy

$$L[\bar{q}_1(t), \dots, \bar{q}_n(t), \dot{\bar{q}}_1(t), \dots, \dot{\bar{q}}_n(t), q_1^{(N_1)}(t), \dots, q_i^{(N_i)}(t), \dots, q_n^{(N_n)}(t)] \approx L(t), \quad (3)$$

gdzie N_i — najwyższy rząd pochodnej $q_i(t)$.

W dalszych rozważaniach symbol L oznaczać będzie wyrażenie przybliżone. Zgodnie z zasadą Hamiltona wszystkie wyrażenia,

$$\frac{\partial I}{\partial a_{ik}} = 0 \quad (4)$$

$$\text{gdzie } k = 1, 2, \dots, \bar{N}_i; \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad I = \int_{t_1}^{t_2} K dt,$$

$$\text{czyli } \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial I}{\partial a_{ik}} dt = 0, \quad (5)$$

Przyjmujemy, że człony scałkowane w przedziale $t_1 \div t_2$ równają się zeru. Funkcja podcałkowa pozostałej całki jest φ_{ik} pomnożona przez funkcję, którą otrzymamy podstawiając założone rozwiązania (2) do lewej strony typowego równania różniczkowego (1).

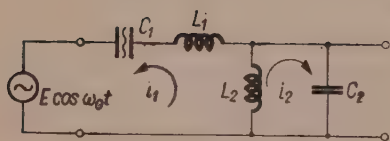
A więc zamiast równań (5) możemy stosować układ równań:

$$\int_{t_1}^{t_2} F_i(\bar{q}_1 \dots \bar{q}_n) \varphi_{ik}(t) dt = 0 \quad \begin{matrix} k=1, 2 \dots \bar{N}_i \\ i=1, 2 \dots n \end{matrix} \quad (11)$$

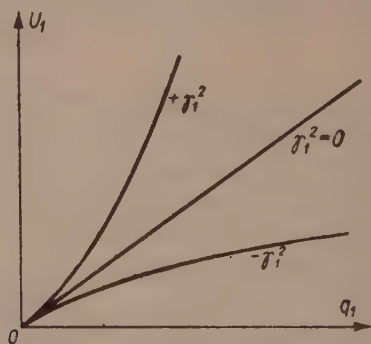
Każda z tych całek prowadzi do N równań algebraicznych zawierających N nieznanych współczynników typu a_{ik} . Przedział całkowania najwygodniej jest obrać jako okres drgań, godząc się z ograniczeniem metody do poszukiwania przybliżonych rozwiązań periodycznych, a jednocześnie zapewniając znikanie członów scałkowanych w równaniu (10). W powyższych rozważaniach nie został narzucony żaden warunek co do postaci funkcji $\varphi_{ik}(t)$. Funkcje $\varphi_{ik}(t)$ wybieramy kierując się dostępnymi wiadomościami dotyczącymi postaci przewidywanego rozwiązania ze zbioru funkcji ortogonalnych w przedziale całkowania (11).

Przykład analizy układu nieliniowego z dwoma stopniami swobody metodą Galerkina-Ritz'a.

Omówioną poprzednio metodę zastosujemy do nieliniowego filtra (rys. 1).



Rys. 1



Rys 2

Charakterystykę nieliniowej pojemności (rys. 2) przyjmujemy

$$U_1 = a_1(q_1 \pm \gamma_1^2 q_1^3). \quad (12)$$

Korzystając z (11) możemy dla rozpatrywanego układu napisać układ równań:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} F_1[\bar{q}_1(t), \bar{q}_2(t)] \xi(t) dt &= 0, \\ \int_{t_0}^{t_1} F_2[\bar{q}_1(t), \bar{q}_2(t)] \xi(t) dt &= 0, \end{aligned} \quad (13)$$

gdzie $F_{1,2}$ są funkcjami powstałymi przez wstawienie założonych przybliżonych rozwiązań do równań różniczkowych opisujących układ (rys. 1). Ponieważ na układ działa wymuszenie harmoniczne, to co najmniej

w jednej z tych całek wystąpią człony \sin lub \cos . Można więc założyć $\xi(t)$ w postaci \sin lub \cos , pamiętając o ich ortogonalności. Jeżeli $\xi(t)$ nie jest taką samą funkcją jak wymuszenie, całka (13) nie będzie zawierać udziału wymuszenia, a więc równania algebraiczne wynikające z równań (13) będą odpowiadać drganiom własnym układu. Ostateczne $\xi(t)$ musi mieć taką samą postać trygonometryczną jak funkcja wymuszająca. Opierając się na własności ortogonalności, łatwo można zobaczyć, że całkowanie w równaniach (13) można ominąć, wprowadzając założone rozwiązania \bar{q}_1 i \bar{q}_2 bezpośrednio do równań różniczkowych, zastępując wyższe potęgi funkcji trygonometrycznych przez funkcje wielokrotnych ich argumentów i zachowując tylko te człony, które mają tę samą częstotliwość co $\xi(t)$.

Założone rozwiązanie aproksymacji jednoczłonowej jest

$$\begin{aligned}\bar{q}_1(t) &= Q_1 \cos \omega_0 t, \\ \bar{q}_2(t) &= Q_2 \cos \omega_0 t.\end{aligned}\quad (14)$$

Po wykonaniu obliczeń układ dwóch równań różniczkowych nieliniowych sprowadziliśmy do układu równań algebraicznych

$$\left. \begin{aligned}-L_1 \omega_0^2 Q_1 + a_1 Q_1 \pm \frac{3}{4} a_1 \gamma_1^2 Q_1^3 - a_2(Q_2 - Q_1) - E &= 0, \\ -L_2 \omega_0^2 Q_2 + a_2(Q_2 - Q_1) &= 0.\end{aligned}\right\} \quad (15)$$

Rozwiązanie tych równań pozwala znaleźć amplitudy Q_1 i Q_2 w funkcji

$$a_1, a_2, \gamma_1^2, L_1, L_2, E \text{ i } \omega_0.$$

Do równań (15) wprowadzamy oznaczenia:

$$\begin{aligned}\frac{a_1}{L_1} &= a_1^2, & \frac{a_2}{L_2} &= a_2^2; & \frac{L_2}{L_1} &= \lambda; & \frac{E}{L_1} &= e; & \frac{a_2^2}{a_1^2} &= a^2; \\ \frac{e}{a_1^2} &= r, & \frac{\omega_0^2}{a_1^2} &= \beta^2; & \sqrt{\frac{3}{4}} \gamma_1 Q_1 &= \eta_1; & \sqrt{\frac{3}{4}} \gamma_1 Q_2 &= \eta_2; \\ \sqrt{\frac{3}{4}} \gamma_1 r &= \varrho; & a &= \left[1 - \beta^2 + a^2 \lambda - \frac{a^4 \lambda}{a^2 - \beta^2} \right].\end{aligned}\quad (16)$$

Otrzymamy wtedy równania

$$\pm \eta_1^3 + a \eta_1 - \varrho = 0, \quad (17)$$

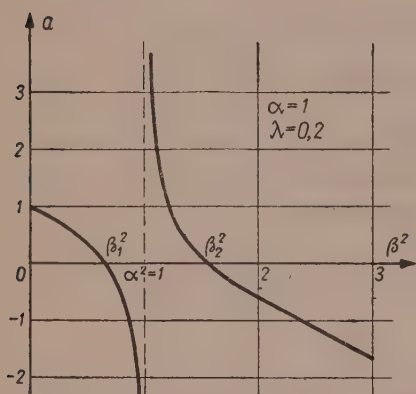
$$\eta_2 = \frac{a^2}{a^2 - \beta^2} \eta_1. \quad (18)$$

Gdy $\gamma_1^2 \neq 0$ układ ten nie nadaje się do badania filtru liniowego.

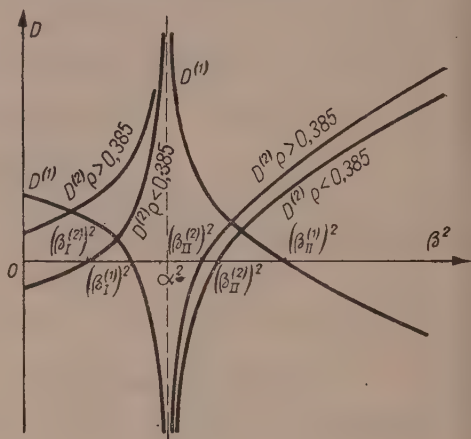
Traktując a i λ jako stałe, znajdziemy przebiegi η_1 i η_2 w funkcji β^2 z ϱ jako parametrem.

Drgania wymuszone w obwodzie przedstawionym na rys. 1.

Funkcję przenoszenia filtra nieliniowego (rys. 1) określa w zasadzie przebieg rozwiązań η_1 równania (17). Ponieważ liczba i postać pierwiastków rzeczywistych równania (17) zależy od znaków dwóch pomocniczych parametrów $p = \frac{a}{3}$ oraz $D = q^2 + p^3$, gdzie $q = -\frac{\varrho}{2}$, na rysunkach 3 i 4 podano ich przebieg w zależności od β^2 dla ustalonych wartości a i λ .



Rys. 3



Rys. 4

W dalszych rozważaniach indeks (1) oznacza obwód z elementem nieliniowym o charakterystyce wznoszącej się, natomiast (2) — obwód o charakterystyce z nasyceniem.

Wartości charakterystyczne β^2 z rysunków 3 i 4 są:

$$(\beta_{12}^{(1)})^2 = \frac{(1 + a^2 + a^2\lambda) \pm \sqrt{(1 + a^2 + a^2\lambda)^2 - 4a^2}}{2}, \quad (19)$$

$$(\beta_{1II}^{(1)}) = \frac{(1 + a^2 + a^2\lambda + k) \pm \sqrt{(1 + a^2 + a^2\lambda + k)^2 - 4a^2(1 + k)}}{2} \quad (20)$$

gdzie $k = 3 \sqrt[3]{\frac{\varrho^2}{4}}$.

Rozwiązania równania (17) są następujące:

$$0 \leq \beta^2 \leq (\beta_1^{(1)})^2; \quad \frac{\varrho^2}{4} + \frac{1}{27} \geq D \geq D_1; \quad 1 \geq a \geq 0;$$

$$\eta_1^{(1)} = 2 \sqrt{\frac{|a|}{3}} \operatorname{sh} \left(\frac{\operatorname{ar sh} b}{3} \right) \quad (21)$$

$$\text{gdzie } b = \frac{\varrho}{2 \sqrt{\frac{|a|^3}{27}}}$$

$$(\beta_1^{(1)})^2 \leq \beta^2 \leq (\beta_I^{(1)})^2; \quad D_1 \geq D \geq 0; \quad 0 \geq a \geq a_1;$$

$$\eta_1^{(1)} = 2 \sqrt{\frac{|a|}{3}} \operatorname{ch} \left(\frac{\operatorname{ar ch} b}{3} \right) \quad (22)$$

$$(\beta_1^{(1)})^2 \leq \beta^2 < \alpha^2; \quad 0 \geq D > -\infty; \quad a_1 \geq a > -\infty;$$

$$\eta_1^{(1)'} = 2 \sqrt{\frac{|a|}{3}} \cos \left(\frac{\operatorname{arc cos} b}{3} \right) \quad (23a)$$

$$\eta_1^{(1)''} = -2 \sqrt{\frac{|a|}{3}} \cos \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\operatorname{arc cos} b}{3} \right) \quad (23b)$$

$$\eta_1^{(1)'''} = -2 \sqrt{\frac{|a|}{3}} \cos \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\operatorname{arc cos} b}{3} \right) \quad (23c)$$

$$\alpha^2 < \beta^2 \leq (\beta_2^{(1)})^2; \quad \infty > D \geq D^2; \quad \infty > a \geq 0;$$

$$\eta_1^{(1)} = 2 \sqrt{\frac{a}{3}} \operatorname{sh} \left(\frac{\operatorname{arc sh} b}{3} \right) \quad (24)$$

$$(\beta_2^{(1)})^2 \leq \beta^2 \leq (\beta_{II}^{(1)})^2; \quad D_2 \geq D > 0; \quad 0 \geq a \geq a_2;$$

$$\eta_1^{(1)} = 2 \sqrt{\frac{a}{3}} \operatorname{ch} \left(\frac{\operatorname{ar ch} b}{3} \right) \quad (25)$$

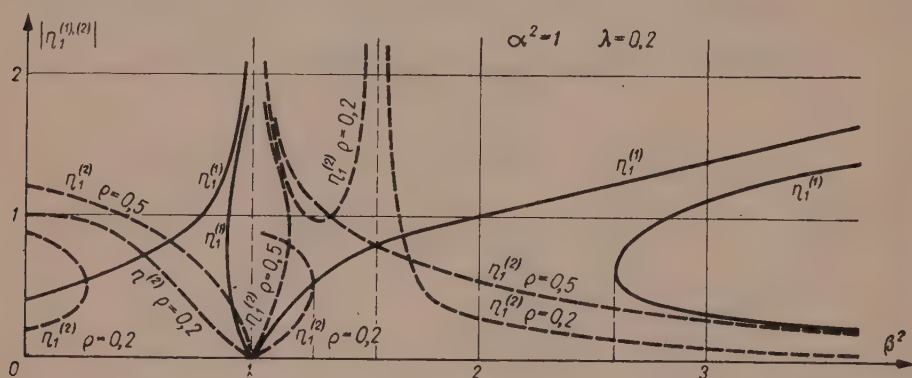
$$\beta^2 \geq (\beta_{II}^{(1)})^2; \quad 0 \geq D > -\infty; \quad a_2 \geq a > -\infty;$$

$$\eta_1^{(1)'} = 2 \sqrt{\frac{a}{3}} \cos \left(\frac{\operatorname{arc cos} b}{3} \right) \quad (26a)$$

$$\eta_1^{(1)''} = -2 \sqrt{\frac{a}{3}} \cos \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\operatorname{arc cos} b}{3} \right) \quad (26b)$$

$$\eta_1^{(1)'''} = -2 \sqrt{\frac{a}{3}} \cos \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\operatorname{arc cos} b}{3} \right) \quad (26c)$$

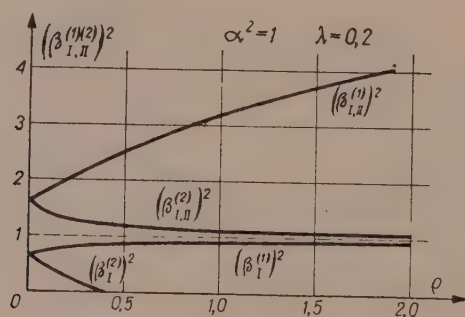
Podany na rys. 5 przebieg charakterystyki $\eta_1 = f(\beta^2)$ dla ustalonych wartości parametrów obwodów a^2 i λ oraz wymuszenia ϱ wystarczająco pokazują najistotniejsze własności obwodów z elementami nieliniowymi. W przeciwieństwie do obwodów ze wszystkimi elementami liniowymi, wartości odpowiadające $\frac{\partial \beta^2}{\partial \eta_1^{(i)}} = 0$ tzn. β_1^2 oraz β_{11}^2 zależą bezpośrednio od amplitudy wymuszenia ϱ (20).



Rys. 5

Przebieg tej zależności podany został na charakterystykę na rys. 6.

Rozwiązanie obwodu z elementem o charakterystyce z nasyceniem prowadzi do podobnych wyników.



Rys. 6

Na rysunkach 3 i 4 podano przebiegi pomocniczych parametrów D i a w zależności od β^2 dla ustalonych a^2 i λ .

Odpowiednie wartości charakterystyczne β^2 z rys. 3 i 4 są:

$$(\beta_{12}^{(2)})^2 = \frac{(1 + a^2 + a^2 \lambda) \pm \sqrt{(1 + a^2 + a^2 \lambda)^2 - 4a^2}}{2} \quad (27)$$

$$(\beta_{I\ II}^{(2)})^2 = \frac{(1 + a^2 + a^2\lambda - k) \pm \sqrt{(1 + a^2\lambda + a^2 - k)^2 - 4a^2(1 - k)}}{2} \quad (28)$$

Dla $k > 1$, a więc dla wymuszenia $\varrho > 0,385$, znika jedna z częstotliwości $(\beta_I^{(2)})^2$, rozwiązania $\eta_1^{(2)}$ mają inną postać (rys. 5).

Rozwiązania $\eta_2^{(2)}$ w funkcji β^2 są następujące:

I. $k < 1$

$$0 \leq \beta^2 \leq (\beta_I^{(2)})^2; \quad \frac{\varrho^2}{4} - \frac{1}{27} \leq D \leq 0; \quad 1 \geq a \geq a_1;$$

$$\eta_1^{(2)'} = 2 \sqrt{\frac{a}{3}} \cos\left(\frac{\arccos b}{3}\right) \quad (29a)$$

$$\eta_1^{(2)''} = -2 \sqrt{\frac{a}{3}} \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\arccos b}{3}\right) \quad (29b)$$

$$\eta_1^{(2)'''} = -2 \sqrt{\frac{a}{3}} \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\arccos b}{3}\right) \quad (29c)$$

$$(\beta_I^{(2)})^2 \leq \beta^2 \leq (\beta_I^{(2)})^2; \quad 0 \leq D \leq D_1; \quad a_1 \geq a > 0;$$

$$\eta_1^{(2)} = 2 \sqrt{\frac{a}{3}} \operatorname{ch}\left(\frac{\operatorname{ar} \operatorname{ch} b}{3}\right) \quad (30)$$

$$(\beta_I^{(2)})^2 < \beta^2 < a^2; \quad 0 \leq D < \infty; \quad 0 \geq a > -\infty;$$

$$\eta_1^{(2)} = 2 \sqrt{\frac{a}{3}} \operatorname{sh}\left(\frac{\operatorname{ar} \operatorname{sh} b}{3}\right) \quad (31)$$

$$a^2 < \beta^2 < (\beta_{II}^{(2)})^2; \quad -\infty < D < 0; \quad \infty > a \geq a_2;$$

$$\eta_1^{(2)'} = 2 \sqrt{\frac{a}{3}} \cos\left(\frac{\arccos b}{3}\right) \quad (32a)$$

$$\eta_1^{(2)''} = -2 \sqrt{\frac{a}{3}} \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\arccos b}{3}\right) \quad (32b)$$

$$\eta_1^{(2)'''} = -2 \sqrt{\frac{a}{3}} \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\arccos b}{3}\right) \quad (32c)$$

$$(\beta_{II}^{(2)})^2 < \beta^2 < (\beta_2^{(2)})^2; \quad 0 \leq D \leq D_2; \quad a_2 \geq a > 0$$

$$\eta_1^{(2)} = 2 \sqrt{\frac{a}{3}} \operatorname{ch}\left(\frac{\operatorname{ar} \operatorname{ch} b}{3}\right) \quad (33)$$

$$\beta^2 > (\beta_2^{(2)})^2; \quad D > D_2; \quad 0 < a > \infty;$$

$$\eta_1^{(2)} = 2 \sqrt{\frac{a}{3}} \operatorname{sh} \left(\frac{\operatorname{ar sh} b}{3} \right) \quad (34)$$

II. $k > 1$

$$0 \leq \beta^2 \leq (\beta_1^{(2)})^2; \quad 0 \leq \frac{\varrho^2}{4} - \frac{1}{27} < D \leq D_1; \quad 1 \geq a \geq 0$$

$$\eta_1^{(2)} = 2 \sqrt{\frac{a}{3}} \operatorname{ch} \left(\frac{\operatorname{ar ch} b}{3} \right) \quad (35)$$

W dalszych przedziałach wzory są identyczne z (31), (32), (33) i (34).

Drgania własne w badanym obwodzie.

Rozwiązania równania (17) przy założeniu $\varrho = 0$ można zapisać, jako

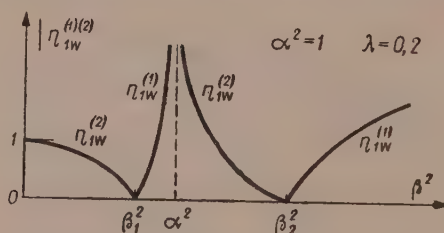
$$\eta_{1w} = 0 \quad (36)$$

oraz

$$\eta_{1w}^2 = \pm a \quad (37)$$

+ lub — w zależności od postaci elementu nieliniowego.

Rozwiązanie (37) posiada trzy charakterystyczne pulsacje; dwie pulsacje β_{12} określone wzorem (19), gdy $\eta_{1w} = 0$, oraz $\beta_3^2 = \alpha^2$ gdy $\eta_{1w} \rightarrow \infty$. Ponieważ nieliniowa pojemność może mieć charakterystykę wzrastającą lub z nasyceniem, co odpowiada znakowi + lub — przy γ_1^2 w (15) oraz odpowiednim znakom przy η_1^3 w (17), można na podstawie (37) określić przedziały, w których możliwe są drgania odpowiadające któremuś ze znaków (rys. 7).



Rys. 7

Zakończenie

Powyższa metoda aproksymacyjna Galerkina-Ritza, zastosowana do rozwiązywania układu równań różniczkowych nieliniowych, posiada szereg istotnych zalet.

— Pozwala wyznaczyć rozwiązania w stanie ustalonym dla systemów z wymuszeniem i odosobnionych.

Prowadzi w sposób prosty i bezpośredni do podstawowych algebraicznych „równań wyjściowych”, pierwiastki których dają natychmiast poszukiwane rozwiązania.

Otrzymane rozwiązania o założonej postaci mają współczynniki optymalne w tym sensie, że rozwiązania te zbliżają się możliwie blisko do rozwiązań ścisłych.

— Metodę tę można stosować nie wiedząc nawet jaka zasada minimalizacji wchodzi w rachubę.

Nie trzeba robić żadnych założeń co do wielkości amplitudy drgań i odchylenia od liniowości elementów.

Natomiast najistotniejszym i jednocześnie najsłabszym momentem tej metody jest wybór funkcji współrzędnych $\varphi_{ik}(t)$. Mimo to zastosowanie tej metody do układów z wieloma stopniami swobody już w pierwszym przybliżeniu pozwala określić własności tych obwodów.

WYKAZ LITERATURY

1. Andronow A. A., Witt A. A., Chajkin S. E.: *Teoria kolebanij*, Moskwa 1959.

АНАЛИЗ ПАССИВНЫХ МНОГОКОНТУРНЫХ СИСТЕМ С НЕЛИНЕЙНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

В статье приведен анализ полосового пропускного фильтра с нелинейной емкостью, произведенный путем непосредственного решения системы нелинейных дифференциальных уравнений приближенным методом средних значений Галеркина-Ритца. Разыскивались решения только для установившегося режима при применении исключительно первого приближения. Полученные результаты иллюстрируют зависимость пропускной полосы фильтра от амплитуды сигнала в зависимости от характеристики нелинейного элемента и явления затухания некоторых резонансных частот фильтра.

ANALYSIS OF PASSIVE MULTIMESH ELECTRIC NETWORKS WITH NON-LINEAR ELEMENTS

The paper is concerned with analysis of band-pass filter with non-linear capacitance. Galerkin-Ritz approximate averaging method is used for resolving a set of non-linear differential equations. In search for solutions related with the steady-state only the problem was confined to the one-term approximation. The results display the relationship character between band-pass and signal amplitude depending on the characteristic of nonlinear element, and the fact of fading away of some resonance frequencies of the filter.

621.392.5:621.3.019

J. KUDREWICZ

O pewnej metodzie badania stabilności nieliniowych układów elektrycznych

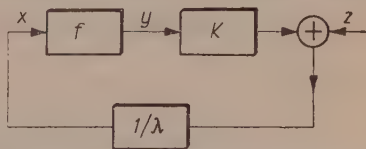
Rękopis dostarczono 30. 5. 1960 .

Układy elektryczne zawierające elementy liniowe i nieliniowe niezależne *explicite* od czasu opisują się równaniem, lub układem równań całkowych nieliniowych typu Volterra z jądrami różnicowymi. W pracy badane są własności rozwiązań takich równań w klasie funkcji prawie okresowych (tworzących przestrzeń Hilberta), w której wprowadzono normę równą wartości skutecznej przebiegu (liczonej w okresie czasu $(0, T)$ przy $T \rightarrow \infty$). Układ elektryczny pracujący w zamkniętej pętli sprzężenia zwrotnego nazwano stabilnym (energetycznie), jeżeli pobudzony przyłożonym z zewnątrz przebiegiem o mocy równej zero, daje odpowiedź również o znikającej mocy. Korzystając z podstawowych pojęć analizy funkcjonalnej (normy i widma operatora) w przestrzeni Hilberta ustalono warunki gwarantujące stabilność układu w zdefiniowanym powyżej sensie. Podano również sposoby wyznaczania widma i obliczania norm operatorów liniowych, przy pomocy których szacuje się zakres stabilności. Przedstawiona metoda pozwala na łatwe przedyskutowanie warunków stabilności w zależności od pewnego wydzielonego parametru charakteryzującego wzmocnienie wzmacniacza umieszczonego w pętli sprzężenia zwrotnego. Na zakończenie podano kilka przykładów ilustrujących metodę.

Rozpatrzmy nieliniowy układ elektryczny o schemacie blokowym pokazanym na rys. 1, gdzie f przedstawia czwórnik nieliniowy o charakterystyce $y=f(x)$, K — czwórnik liniowy o charakterystyce impulsowej $k(t)$ i $1/\lambda$ — wzmacniacz o współczynniku wzmocnienia $1/\lambda$.

Przy założeniu, że K jest układem zbudowanym z elementów o stałych skupionych i nie zależnych od czasu, równanie dla przebiegów elektrycznych $x(t)$ w układzie przyjmie postać:

$$\lambda x(t) = \int_0^t k(t-\tau) f[x(\tau)] d\tau + z(t), \quad (1)$$



Rys. 1. Schemat blokowy najprostszego układu elektrycznego z jednym elementem nieliniowym.

gdzie $z(t)$ jest przebiegiem przyłożonym z zewnątrz do układu (lub powstałym w układzie K na skutek warunków początkowych), natomiast $k(t)$ jest odwrotną transformatą Laplace'a funkcji przenoszenia $K(s) = \frac{L(s)}{M(s)}$ układu K .

Układ opisuje się więc równaniem całkowym (nieliniowym) typu Volterry.

Interesować nas będzie zachowanie się układu (rozwiązań równania (1)) w zależności od zmian parametru λ i przyłożonych z zewnątrz przebiegów $z(t)$. Ponieważ niemożliwe jest uzyskanie efektywnego rozwiązania równania (1) w formie wygodnej do przedyskutowania, określono pewną własność równania, tzw. stabilność, na podstawie której klasyfikuje się rozwiązania. Poniżej podajemy definicje stabilności.

Df. 1. Układ nazywamy stabilnym w sensie Lapunowa, jeżeli małym funkcjom $z(t)$ odpowiadają małe rozwiązania $x(t)$ lub dokładniej precyzując, jeżeli dla dowolnego $\varepsilon > 0$ można dobrać takie $\eta(\varepsilon)$, że z nierówności: $\sup_{0 < t < \infty} |z(t)| < \eta$ wynika $\sup_{0 < t < \infty} |x(t)| < \varepsilon$.

Df. 2. Układ nazywamy stabilnym asymptotycznie, jeżeli z tego, że $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0$ wynika, że również $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$.

Badanie rozwiązań równania (1) z punktu widzenia stabilności rozumianej w sensie definicji Df. 1 i Df. 2 przeprowadzone jest w pracy [2]. Równanie (1) traktuje się tam jako równanie operatorowe nad elementami przestrzeni Banacha $C_{(0, \infty)}(L)$ funkcji ciągłych z normą $\sup_{0 < t < \infty} |x(t)|$, jak również przestrzeni ilorazowej C/N , gdzie N jest klasą funkcji znikających w nieskończoności. W obu przypadkach dla określenia warunków stabilności korzysztano z pojęcia widma i normy operatora

$$Kx = \int_0^t k(t-\tau) x(\tau) d\tau.$$

Wielką niedogodnością przedstawionej tam teorii jest trudność praktycznego określenia normy operatora. Stosunkowo łatwo natomiast jest określić widmo operatora K , które w obu przestrzeniach $C_{(0, \infty)}$ i C/N jest takie samo, a promień spektralny wynosi:

$$\|K\|_{sp} = \sup_{\operatorname{Re} s \geq 0} \left| \frac{L(s)}{M(s)} \right| = \sup_{-\infty < w < +\infty} \left| \frac{L(iw)}{M(iw)} \right|. \quad (2)$$

Dla operatora K w przestrzeniach $C_{(0, \infty)}$ i C/N uzyskano następujące nierówności:

$$\|K\|_{sp} \leq \|K\|_{C/N} \leq \|K\|_C \leq \int_0^{\infty} |k(t)| dt, \quad (3)$$

które pozwalają wprowadzić na łatwe oszacowanie normy, nie pozwalają jednak na efektywne jej obliczenie.

Ze względów praktycznych najwygodniej byłoby rozważać równanie (1) w takiej przestrzeni, w której norma operatora K równałaby się jego promieniowi spektralnemu, i aby przy tym z normy rozwiązania można było wnioskować o stabilności układu.

Przestrzenią taką okazał się zbiór funkcji prawie okresowych (H. Bohra), w którym określono normę

$$\|x\|_H = \lim_{T \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 dt}. \quad (4)$$

Zasadnicze własności tej przestrzeni (oznaczymy ją przez H) jak również własności określonego na niej operatora K zbadane będą w rozdziałach 1—3. Jeżeli funkcja $x(t)$ oznacza prąd lub napięcie elektryczne, to $\|x\|_H$ jest jej asymptotyczną wartością skuteczną liczoną w okresie czasu $t \in (0, T)$ przy $T \rightarrow \infty$, natomiast kwadrat normy jest proporcjonalny do mocy sygnału $x(t)$.

Badania równania (1) w przestrzeni $C_{(0, \infty)}$ i C/N pozwalają na określenie warunków stabilności odpowiednio w sensie definicji Df. 1 i Df. 2. Podobnie rozważania w przestrzeni H pozwalają określić warunki stabilności według następującej definicji.

Df. 3. Układ nazywamy stabilnym energetycznie, jeżeli z tego, że moc sygnału $z(t)$ jest równa zero ($\|z\|_H = 0$) wynika, że również moc $x(t)$ znika ($\|x\|_H = 0$).

Niniejsza praca poświęcona jest badaniu warunków stabilności w sensie definicji Df. 3.

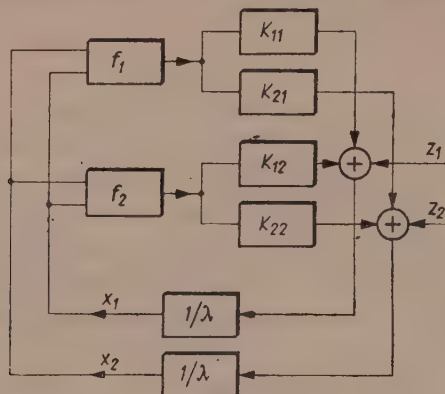
Metody badania równania (1) w przestrzeni H dają się łatwo uogólnić na układy równań opisujące obwody elektryczne z wieloma członami nieliniowymi i wieloma pętlami sprzężenia zwrotnego. Np. układ dwóch równań z dwoma niewiadomymi:

$$\begin{aligned} \lambda x_1(t) &= \int_0^t k_{11}(t-\tau) f_1[x_1(\tau), x_2(\tau)] d\tau + \int_0^t k_{12}(t-\tau) f_2[x_1(\tau), x_2(\tau)] d\tau + z_1(t) \\ \lambda x_2(t) &= \int_0^t k_{21}(t-\tau) f_1[x_1(\tau), x_2(\tau)] d\tau + \int_0^t k_{22}(t-\tau) f_2[x_1(\tau), x_2(\tau)] d\tau + z_2(t) \end{aligned} \quad (5)$$

opisuje przebiegi elektryczne w układzie pokazanym na rys. 2. Metody badania stabilności układów wieloobwodowych nie różnią się w swej istocie od metod badania najprostszego układu przedstawionego na rys. 1.

Celem przedstawionej pracy jest oszacowanie tzw. obszaru stabilności energetycznej, to jest określenie przedziału zmienności współczynnika $1/\lambda$, dla którego układ nie może generować drgań ustalonych o pewnej określonej amplitudzie. Dokładną definicję obszaru stabilności energetycznej oraz wyprowadzenie nierówności (72), (73) szacujących ten obszar

podano w rozdz. 5. Rozdziały 1—4 są poświęcone jedynie przygotowaniu pewnych pojęć i podaniu metod obliczania wielkości wchodzących w nierówności (72) i (73). W rozdz. 1 sprecyzowano dokładnie zbiór funkcji, wśród których poszukiwać będziemy rozwiązań równań opisujących włas-



Rys. 2. Schemat blokowy układu elektrycznego opisującego się układem dwóch równań z dwoma niewiadomymi $x_1(t)$, $x_2(t)$.

ności elektryczne układu. Rozdziały 2 i 3 poświęcone są badaniu operatorów liniowych w tych przestrzeniach, natomiast w rozdz. 4 badane są własności operatorów nieliniowych. W zakończeniu przeprowadzono porównanie przedstawionej metody badania stabilności z metodami omówionymi w [2], oraz podano kilka przykładów.

1. OKREŚLENIE I WŁASNOŚCI PRZESTRZENI H

Załóżmy, że interesujące nas przebiegi elektryczne w układzie są funkcjami ciągłymi o postaci

$$x(t) = \sum_{\nu} c_{\nu} e^{s_{\nu} t} \quad (6)$$

określonymi dla $t \geq 0$, gdzie $\operatorname{Re} s_{\nu} \leq 0$ i $\sum_{\nu} |c_{\nu}|^2 < \infty$.

Sumę (6) rozbić można na dwa składniki

$$x(t) = \sum_n c_n e^{s_n t} + \sum_{\nu} c_{\nu} e^{i\omega_{\nu} t} \quad (7)$$

gdzie pierwszy zawiera tylko te wyrazy, dla których $\operatorname{Re} s_n < 0$ natomiast drugi te, dla których $\operatorname{Re} s_{\nu} = 0$ ($s_{\nu} = i\omega_{\nu}$).

Zbiór funkcji o postaci $\sum_{\nu} c_{\nu} e^{i\omega_{\nu} t}$ jest identyczny ze zbiorem wszystkich funkcji prawie okresowych w sensie Bohra [1]. Można również wykazać, że każda funkcja ciągła znikająca w nieskończoności może być

przybliżana z dowolną dokładnością (w sensie zbieżności jednostajnej) przez funkcje o postaci $\sum_n c_n e^{s_n t}$, gdzie $\operatorname{Re} s_n < 0$.¹

Funkcje o postaci (6) tworzą przestrzeń liniową H_0 , jeżeli dodawanie i mnożenie funkcji przez liczbę określimy w zwykły sposób. Na funkcjach tej przestrzeni określić można funkcjonal dwuliniowy o postaci

$$(x, y) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(\tau) \overline{y(\tau)} d\tau. \quad (8)$$

Funkcjonał ten jest ciągły i spełnia warunek $(x, y) = \overline{(y, x)}$.

Rozpatrzmy w szczególności funkcjonal kwadratowy (x, x) :

$$(x, x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |x(\tau)|^2 d\tau. \quad (9)$$

Łatwo sprawdzić, że jeżeli $\int_0^\infty |x(\tau)|^2 d\tau < \infty$, to $(x, x) = 0$. Ogólniej, jeżeli istnieje granica $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$, to zgodnie z regułą de'Hospitala mamy:

$$(x, x) = \lim_{T \rightarrow \infty} |x(T)|^2, \quad (10)$$

a wszystkie funkcje znikające w nieskończoności zerują funkcjonal (x, x) .

Oznaczmy przez N zbiór tych wszystkich funkcji należących do H_0 , które zerują funkcjonal (x, x) . Wykażemy, że funkcje te mają postać

$$\sum_n c_n e^{s_n t}, \quad \text{gdzie} \quad \operatorname{Re} s_n < 0. \quad (11)$$

Istotnie, przyjmując, że $x(t)$ ma postać (6), otrzymamy

$$(x, x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{\nu, \mu} c_\nu \bar{c}_\mu e^{(s_\nu + \bar{s}_\mu)t} dt = \sum_{\nu, \mu} c_\nu \bar{c}_\mu \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T e^{(s_\nu + \bar{s}_\mu)t} dt,$$

a ponieważ

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T e^{(s_\nu + \bar{s}_\mu)t} dt = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad \operatorname{Re}(s_\nu + \bar{s}_\mu) < 0 \quad \text{lub} \quad s_\nu \neq s_\mu \\ 1 & \text{dla} \quad s_\nu = s_\mu = iw_\nu \end{cases}$$

więc $(x, x) = \sum_\nu |c_\nu|^2$, gdzie suma rozciągnięta jest tylko na te wskaźniki, dla których $\operatorname{Re} s_\nu = 0$.²

¹ Jest to wniosek z twierdzenia Stone'a-Weierstrassa.

² Zamiana kolejności sumowania z całkowaniem jest możliwa ze względu na założenie $\sum_\nu |c_\nu|^2 < \infty$.

Utwórzmy teraz przestrzeń ilorazową H_0/N i oznaczmy ją przez H . Elementami jej są klasy funkcji różniących się od siebie o funkcje zerujące funkcjonal (x, x) . Każda z tych klas daje się reprezentować przez funkcję o postaci

$$x(t) = \sum_{\nu} c_{\nu} e^{i w_{\nu} t} \quad \text{gdzie} \quad \sum_{\nu} |c_{\nu}|^2 < \infty. \quad (12)$$

W dalszym ciągu klasy, będące elementami przestrzeni ilorazowej, utożsamiać będziemy z reprezentantami tych klas, funkcjami o postaci (12).

Funkcjonał (8) określony na przestrzeni H (gdzie $x(t)$, $y(t)$ oznaczają teraz dowolnego reprezentanta klasy będącej elementem przestrzeni ilorazowej H_0/N) spełnia teraz aksjomaty iloczynu skalarnego i H staje się przestrzenią Hilberta (niezupełną).

Iloczyn skalarny indukuje normę

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 dt} = \sqrt{\sum_{\nu} |c_{\nu}|^2}, \quad (13)$$

(suma rozciągnięta jest na te wskaźniki ν , dla których $\operatorname{Re} s_{\nu} = 0$).

Funkcje $e^{i w_{\nu} t}$ dla $-\infty < w_{\nu} < \infty$ stanowią w przestrzeni H nieprzeliczalną bazę jednostkowych wzajemnie ortogonalnych wektorów. Łatwo bowiem sprawdzić, że

$$(e^{i w_1 t}, e^{i w_2 t}) = \begin{cases} 0 & \text{dla } w_1 \neq w_2 \\ 1 & \text{dla } w_1 = w_2. \end{cases} \quad (14)$$

Przestrzeń H jest nieośrodkową.

Zgodnie z definicją (13), norma elementu x w przestrzeni H jest asymptotyczną (w przedziale $(0, T)$ dla $T \rightarrow \infty$) wartością skuteczną funkcji $x(t)$. W przypadku gdy $x(t)$ wyraża prąd lub napięcie sygnału, to $\|x\|^2$ jest proporcjonalne do mocy sygnału.

Oprócz przestrzeni H o elementach zespolonych interesować nas będzie również przestrzeń funkcji rzeczywistych mających postać (12). Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby funkcja $x(t) = \sum_{\nu} c_{\nu} e^{i w_{\nu} t}$ była rzeczywistą, jest $c_{- \nu} = \bar{c}_{\nu}$ (gdzie $w_{- \nu} = -w_{\nu}$). Otrzymamy wtedy

$$x(t) = \sum_{\nu > 0} c_{\nu} e^{i w_{\nu} t} + \sum_{\nu > 0} \bar{c}_{\nu} e^{-i w_{\nu} t} = \sum_{\nu > 0} \alpha_{\nu} \cos w_{\nu} t + \beta_{\nu} \sin w_{\nu} t, \quad (15)$$

gdzie $\alpha_{\nu} = 2 \operatorname{Re} c_{\nu}$, $\beta_{\nu} = -2 \operatorname{Im} c_{\nu}$.

W układach elektrycznych wieloobwodowych interesować nas będą całe zbiory funkcji $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_n(t)$ (z których każda $x_i(t)$ nie należy do H) opisujących przebiegi elektryczne w poszczególnych częściach

układu. Wektor $x(t) = [x_1(t), \dots, x_n(t)]$ traktować wtedy będziemy jako element nowej przestrzeni Hilberta, H_n w której iloczyn skalarny określony jest równością

$$(x, y)_{H_n} = \sum_{i=1}^n (x_i, y_i)_H, \quad (16)$$

gdzie indeksy H_n, H oznaczają, w jakiej przestrzeni brany jest odpowiedni iloczyn skalarny.

Zgodnie z definicją iloczynu skalarnego, norma elementu x w przestrzeni H_n wynosi

$$\|x\|_{H_n} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \|x_i\|_H^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \sum_{i=1}^n |x_i(t)|^2 dt}. \quad (17)$$

Norma w przestrzeni H_n jest więc pierwiastkiem z sumy kwadratów wartości skutecznych poszczególnych przebiegów $x_i(t)$

2. WŁASNOŚCI OPERATORA LINIOWEGO K W PRZESTRZENI H

Weźmy w przestrzeni H klasę funkcji p -krotnie różniczkowalnych. Jest ona, jak wiadomo, gęsta w przestrzeni H (przy zbieżności według normy w H). Określmy na tej klasie operator o postaci

$$y = Kx = a_p \frac{d^p x}{dt^p} + \dots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x + \int_0^t k(t-\tau) x(\tau) d\tau, \quad (18)$$

gdzie a_0, a_1, \dots, a_p są rzeczywistymi współczynnikami liczbowymi, natomiast $k(t)$ jest funkcją taką, że jej transformata Laplace'a jest wymierną o rzeczywistych współczynnikach.

Operator K jest na ogół nieograniczony w przestrzeni H , np. $Kx = \frac{dx}{dt}$ przeprowadza ciąg $\{e^{int}\}$ elementów z kuli jednostkowej w ciąg $\{ine^{int}\}$ nieograniczony.

Każdemu operatorowi o postaci (18) można wzajemnie jednoznacznie przyporządkować pewną funkcję wymierną $K(s) = \frac{L(s)}{M(s)}$ (gdzie L i M są wielomianami) w następujący sposób

$$K(s) = \frac{L(s)}{M(s)} = a_p s^p + \dots + a_1 s + a_0 + \mathcal{L}[k(t)], \quad (19)$$

gdzie \mathcal{L} jest symbolem transformaty Laplace'a. Przyporządkowanie takie zachowuje liniowość, a ponadto superpozycji operatorów odpowiada iloczyn funkcji $K(s)$. Korzystanie z funkcji $K(s)$ okaże się bardzo pożytecznym przy badaniu własności operatora (18).

Obliczmy wartość operatora Kx w punkcie $x(t) = \sum_{\nu} c_{\nu} e^{i w_{\nu} t}$. Wstawiając $x(t)$ do (18) i poddając obie strony równości przekształceniu Laplace'a otrzymamy

$$y(s) = \frac{L(s)}{M(s)} \sum_{\nu} \frac{c_{\nu}}{s - i w_{\nu}} + W_{p-1}(s) + \frac{L(s)}{M(s)} \Theta(s), \quad (20)$$

gdzie

$$\frac{L(s)}{M(s)} = a_p s^p + \dots + a_1 s + a_0 + \mathcal{L}[k(t)],$$

$W_{p-1}(s)$ — wielomian zależny od warunków początkowych,

$\Theta(s)$ — transformata funkcji $\Theta(t)$, będącej zerem przestrzeni H ,
funkcja (wymierna) $\Theta(s)$ jest holomorficzną dla $\operatorname{Re} s \geq 0$
i znikającą w nieskończoności.

Z postaci wzoru (20) łatwo jest określić warunki na to, aby $y = Kx$ było elementem przestrzeni H (dla każdego x nie należy do H).

Twierdzenie: Kx nie należy do H dla każdego x nie należy do H , wtedy i tylko wtedy gdy:

- a) $stL \leq stM \quad (p=0)$
- b) $M(s) \neq 0$ dla $\operatorname{Re} s \geq 0$.

Dowód: Istotnie, jeżeli spełnione są warunki a) i b), to $W_{p-1}(s) \equiv 0$ a transformata odwrotna ostatniego wyrazu w sumie (20) jest funkcją znikającą w nieskończoności (zerem przestrzeni H). Wtedy $y(t)$ jest wyznaczone jednoznacznie przez równość:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{L(s)}{M(s)} \sum_{\nu} \frac{c_{\nu}}{s - i w_{\nu}} \right] = \sum_{\nu} \frac{L(i w_{\nu})}{M(i w_{\nu})} c_{\nu} e^{i w_{\nu} t}. \quad (21)$$

Jeżeli natomiast nie spełniony jest warunek a) lub $M(s)$ ma zero w półpłaszczyźnie $\operatorname{Re} s > 0$, to istnieją takie funkcje $\Theta(t)$ (zera przestrzeni H), że $K\Theta \neq \Theta$ (a nawet $K\Theta$ nie należy do H). W przypadku gdy $M(s)$ znika w co najmniej jednym punkcie $s = i w_0$ na osi $\operatorname{Re} s = 0$, łatwo zauważyć, że $K e^{i w_0 t}$ nie należy do H . (Zakładamy oczywiście, że L i M nie mają wspólnych dzielników).

Operator K spełniający warunki a) i b) nazywać będziemy operatorem ograniczonym.

Suma i iloczyn (superpozycja) operatorów ograniczonych jest również operatorem ograniczonym. Operatorzy tworzą więc pierścień³ (nad ciałem liczb rzeczywistych) z iloczynem przemiennym.

³ Pierścieniem nazywamy zbiór, w którym zdefiniowane są suma i iloczyn elementów spełniające pewne aksjomaty określające własności tych działań. Patrz np. [9] str. 66.

Korzystając z równości (21) można łatwo określić normę operatora ograniczonego K

$$\begin{aligned} \|K\| &\stackrel{df}{=} \sup_{\|x\|=1} \|Kx\| = \sup_{\|x\|=1} \left\| \sum_{\nu} \frac{L(iw_{\nu})}{M(iw_{\nu})} c_{\nu} e^{iw_{\nu}t} \right\| = \\ &= \sup_{\|x\|=1} \sqrt{\sum_{\nu} \left| \frac{L(iw_{\nu})}{M(iw_{\nu})} \right|^2 |c_{\nu}|^2} \leq \sup_{w_{\nu}} \left| \frac{L(iw_{\nu})}{M(iw_{\nu})} \right| \times \\ &\quad \times \sup_{\|x\|=1} \sqrt{\sum_{\nu} |c_{\nu}|^2} \leq \sup_w \left| \frac{L(iw)}{M(iw)} \right|. \end{aligned}$$

Niech $w = w_0$ będzie punktem, w którym $\left| \frac{L(iw)}{M(iw)} \right|$ osiąga swój kres górny.

Wówczas $\|Ke^{iw_0 t}\| = \left| \frac{L(iw_0)}{M(iw_0)} \right|$. Stąd wynika ostatecznie, że

$$\|K\| = \sup_{-\infty < w < +\infty} \left| \frac{L(iw)}{M(iw)} \right| = \sup_{\operatorname{Re} s \geq 0} \left| \frac{L(s)}{M(s)} \right|. \quad (22)$$

Ze względu na warunki a) i b) $\|K\|$ jest liczbą ograniczoną.

Operator odwrotny do operatora o postaci (18) ma również taką samą postać (zmieni się jedynie rząd pochodnej). Podobnie jak operatorowi K odpowiada funkcja wymierna $\frac{L(s)}{M(s)}$, tak operatorowi odwrotnemu K^{-1}

odpowiada funkcja $\frac{M(s)}{L(s)}$:

$$K^{-1}y = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{M(s)}{L(s)} y(s) \right].$$

Operator K^{-1} jest ograniczony, jeżeli $st M \leq st L$ i $L(s) \neq 0$ dla $\operatorname{Re} s \geq 0$ a jego norma wynosi

$$\|K^{-1}\| = \sup_w \left| \frac{M(iw)}{L(iw)} \right| = \left[\inf_w \left| \frac{L(iw)}{M(iw)} \right| \right]^{-1}. \quad (23)$$

Klasa operatorów K spełniających warunki:

c) $st L = st M$,

d) $L(s) \neq 0$ i $M(s) \neq 0$ dla $\operatorname{Re} s \geq 0$

stanowi więc ciało⁴ operatorów ograniczonych, będące podciałem wszystkich operatorów o postaci (18).

⁴ Ciałem nazywamy zbiór elementów będący pierścieniem, w którym każdy element $x \neq 0$ posiada element odwrotny x^{-1} (spełniający równość $xx^{-1} = x^{-1}x = e$ gdzie e jest elementem jednostkowym pierścienia).

Wyznamy teraz operator sprzężony z operatorem ograniczonym. Ponieważ przestrzeń Hilberta H jest identyczna ze swoją przestrzenią sprzężoną, więc operator K^* sprzężony z operatorem K należy również do ciała operatorów o postaci (18). Określimy go z równości

$$(Kx, y) = (x, K^*y) \quad (24)$$

tożsamościowej ze względu na x i y .

Przedstawmy x i y odpowiednio w postaci $x(t) = \sum_{\nu} c_{\nu} e^{i\omega_{\nu} t}$ $y(t) = \sum_{\nu} b_{\nu} e^{i\omega_{\nu} t}$ (jak wiadomo, każdy element przestrzeni H ma taką postać), gdzie suma rozciąga się na przeliczalną ilość tych wskaźników ν , dla których $|c_{\nu}| + |b_{\nu}| \neq 0$. Równość (24) przyjmie wtedy postać:

$$(Kx, y) = \sum_{\nu} \frac{L(i\omega_{\nu})}{M(i\omega_{\nu})} c_{\nu} \bar{b}_{\nu} = \sum_{\nu} c_{\nu} \overline{\left(\frac{L(i\omega_{\nu})}{M(i\omega_{\nu})} b_{\nu} \right)} = (x, K^*y).$$

Stąd, ponieważ $\frac{\bar{L(s)}}{\bar{M(s)}} = \frac{L(\bar{s})}{M(\bar{s})}$ (funkcja wymierna ma rzeczywiste współczynniki) więc operator K^* jest reprezentowany przez funkcję $\frac{L(\bar{s})}{M(\bar{s})}$.

Z (24) wynika ponadto, że dla $x(t) = \sum_{\nu} c_{\nu} e^{i\omega_{\nu} t}$ mamy:

$$K_x^* = \sum_{\nu} \frac{L(-i\omega_{\nu})}{M(-i\omega_{\nu})} c_{\nu} e^{i\omega_{\nu} t}.$$

Pozwala to na odtworzenie postaci operatora K^* . Istotnie można sprawdzić, że operator K^* sprzężony do operatora ograniczonego

$$Kx = a_0 x(t) + \int_0^I k(\tau) x(t-\tau) d\tau$$

ma postać

$$K^*x = a_0 x(t) + \int_0^t k(\tau) x(t+\tau) d\tau. \quad (25)$$

Mamy oczywiście równość $\|K\| = \|K^*\|$ oraz, w przypadku gdy K posiada operator odwrotny ograniczony, to

$$(K^{-1})^* = (K^*)^{-1}. \quad (26)$$

Analogiczna do (21) równość:

$$K_x^* = \sum_{\nu} \frac{L(-i\omega_{\nu})}{M(-i\omega_{\nu})} c_{\nu} e^{i\omega_{\nu} t} \quad (27)$$

śluszną dla operatorów ograniczonych, może być formalnie rozszerzona na operatory nieograniczone. Traktując ją jako definicję operatora sprzężonego (z operatorem nieograniczonym) otrzymamy wzór na operator formalnie sprzężony z operatorem (18)

$$K^*x = (-1)^p a_p \frac{d^p x}{dt^p} + \dots - a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x + \int_0^t k(\tau - t) x(\tau) d\tau. \quad (28)$$

Równość (26) pozostaje prawdziwa również w przypadku formalnego sprzężenia.

Zajmiemy się teraz określeniem widma operatora K w przestrzeni H . Niech K będzie operatorem ograniczonym lub nieograniczonym. Liczbę zespoloną λ , dla której operator $(\lambda I - K)^{-1}$ jest ograniczony, nazywamy wartością regularną operatora K . Zbiór wartości λ , które nie są wartościami regularnymi operatora K , nazywamy widmem i oznaczamy przez $S_p(K)$:

$$S_p(K) \stackrel{\text{df}}{=} \{ \lambda : (\lambda I - K)^{-1} \text{ — operator nieograniczony} \}. \quad (29)$$

Operatorowi $R_\lambda = (\lambda I - K)^{-1}$ odpowiada funkcja $\frac{1}{\lambda - \frac{L(s)}{M(s)}}$ i zgodnie z po-

danym twierdzeniem R_λ jest operatorem ograniczonym, gdy

$$\lambda - \frac{L(s)}{M(s)} \neq 0 \quad \text{dla } \operatorname{Re} s \geq 0 \quad \text{i} \quad \operatorname{st} M \leq \operatorname{st} (\lambda M - L).$$

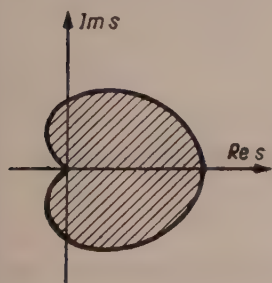
Ponieważ nierówność przeciwna: $\operatorname{st} M > \operatorname{st} (\lambda M - L)$ może zajść jedynie w przypadku, gdy $\operatorname{st} M = \operatorname{st} L$ i $\lambda = \frac{L(\infty)}{M(\infty)}$, więc przyjmując, że punkt $s = \infty$ leży na linii $\operatorname{Re} s = 0$ otrzymamy

$$S_p(K) = \left\{ \lambda : \lambda = \frac{L(s)}{M(s)} \quad \text{dla } \operatorname{Re} s \geq 0 \right\}. \quad (30)$$

Obszar $S_p(K)$ jest więc obrazem prawej półpłaszczyzny przy odwzorowaniu funkcją $K(s) = \frac{L(s)}{M(s)}$.

W przypadku gdy λ jest wartością regularną operatora K , to

$$\|R_\lambda\| = \sup_w \frac{1}{\left| \lambda - \frac{L(iw)}{M(iw)} \right|} = \left[\inf_w \left| \lambda - \frac{L(iw)}{M(iw)} \right| \right]^{-1}. \quad (31)$$



Rys. 3. Przykład widma dla operatora $Kx =$

$$= \int_0^t (t-\tau) e^{-\alpha(t-\tau)} x(\tau) d\tau$$

$$|K(s) = (s + \alpha)^{-2}|.$$

Nazywamy promieniem spektralnym $|K|_{sp}$ operatora K najmniejszą z liczb C takich, że $|\lambda| \leq C$ dla $\lambda \in S_p(K)$. Z (30) wynika, że

$$|K|_{sp} = \sup_{\operatorname{Re} s \geq 0} \left| \frac{L(s)}{M(s)} \right|. \quad (32)$$

Dla operatorów nieograniczonych $|K|_{sp} = \infty$, natomiast dla ograniczonych $|K|_{sp} = \|K\|$.

Z równości (30) wynikają następujące własności widma operatora liniowego:

1. zbiór $\lambda_0 = \frac{L(iw)}{M(iw)}$ dla $-\infty \leq w \leq +\infty$ jest brzegiem widma;
2. jeżeli $\lambda \in S_p(K)$, to również $\bar{\lambda} \in S_p(K)$ [gdyż $\overline{K(s)} = K(\bar{s})$];
3. jeżeli $\lambda \in S_p(K)$, to $\bar{\lambda} \in S_p(K^*)$; operatory K i K^* mają identyczne widmo;
4. jeżeli $\lambda \in S_p(K)$, to $1/\lambda \in S_p(K^{-1})$;
5. jeżeli $\lambda \in S_p(K)$, to $W(\lambda) \in S_p[W(K)]$ gdzie W jest wielomianem o rzeczywistych współczynnikach; w szczególności:

$$\lambda^2 \in S_p(K^2), \quad p - \lambda \in S_p(pI - K), \quad \frac{1}{p - \lambda} \in S_p[(pI - K)^{-1}];$$

6. jeżeli $\lambda \in S_p(K)$, to $|\lambda|^2 \in S_p(K^*K)$.

Z własności 5 wynika równość

$$\|R_\lambda\| = \sup_{w \in S_p(K)} \left| \frac{1}{\lambda - w} \right|, \quad (33)$$

która jest inną postacią wzoru (31).

Operator K przeprowadza funkcje rzeczywiste $x(t)$ przestrzeni H również w funkcje rzeczywiste. Jeżeli, jako dziedzinę operatora K , weźmiemy zbiór wszystkich funkcji rzeczywistych z przestrzeni H , to norma operatora nie ulegnie zmianie. Istotnie, jeżeli $\|Kx\|$ osiąga na kuli jednostkowej swą ekstremalną wartość dla $e^{i w_0 t}$

$$\|K e^{i w_0 t}\| = \left| \frac{L(i w_0)}{M(i w_0)} \right|,$$

to również dla $x(t) = \sqrt{2} \cos w_0 t$ mamy $\|x\| = 1$ i $\|Kx\| = \sqrt{2} \|K \cos w_0 t\| = \sqrt{2} \left\| \frac{L(i w_0)}{M(i w_0)} \frac{e^{i w_0 t}}{2} + \frac{L(-i w_0)}{M(-i w_0)} \frac{e^{-i w_0 t}}{2} \right\| = \left| \frac{L(i w_0)}{M(i w_0)} \right|$.

Wobec tego $\|Kx\|$ osiąga przy $\|x\| = 1$ swój kres górny również na podprzestrzeni rzeczywistej.

Widmem operatora K w przestrzeni rzeczywistej będzie zbiór tych rzeczywistych wartości λ , dla których $\lambda - \frac{L(s)}{M(s)}$ znika w co najmniej jednym punkcie półpłaszczyzny $\operatorname{Re} s \geq 0$.

3. WŁASNOŚCI OPERATORA LINIOWEGO K W PRZESTRZENI H_n

Odpowiednikiem operatora K (określonego przez (18)) w przestrzeni H_n jest macierz operatorów:

$$K = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & K_{nn} \end{pmatrix} \quad (34)$$

gdzie każdy z elementów K_{ij} macierzy K jest operatorem o postaci (18) określonym na zbiorze funkcji dostateczną ilość razy różniczkowalnych, gęstym w przestrzeni H .

Równość $y = Kx$ w przestrzeni H_n należy rozumieć jako układ równości

$$y_i = \sum_{j=1}^n K_{ij} x_j \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (35)$$

Operator K nazywać będziemy ograniczonym, jeżeli dla każdego z wektorów $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ należących do H_n wynik operacji $Kx = y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ również należy do H_n .

Twierdzenie: Operator K w przestrzeni H_n jest ograniczony wtedy i tylko wtedy, gdy każdy z operatorów K_{ij} (elementów macierzy K) jest ograniczony w przestrzeni H .

Dowód: Istotnie, gdy operatory K_{ij} są ograniczone, to wszystkie funkcje y_i nie należą do H . Gdyby natomiast co najmniej jeden operator K_{lp} był nieograniczony np. w punkcie x_0 , to wynik operacji K nad wektorem $x = (0, \dots, 0, x_0, 0, \dots, 0)$, gdzie x_0 stoi na p -tym miejscu, wynosi $y = (y_1, \dots, y_{l-1}, K_{lp} x_0, y_{l+1}, \dots, y_n)$, gdzie $K_{lp} x_0$ stoi na l -tym miejscu. Stąd $y = Kx$ nie należy do H_n , ponieważ $K_{lp} x_0$ nie należy do H .

Operatory o postaci (37) tworzą pierścień na ogół niekomutatywny (iloczyn macierzy nie jest przemienny). Można wykazać; że operator odwrotny do K jest w pewnych przypadkach również operatorem o postaci (34).

Aby zbadać operator odwrotny, przyporządkujemy operatorowi K (34) wzajemnie jednoznacznie macierz funkcji wymiernych $K(s)$

$$K(s) = \begin{bmatrix} K_{11}(s) & \dots & K_{1n}(s) \\ K_{21}(s) & \dots & K_{2n}(s) \\ \dots & \dots & \dots \\ K_{n1}(s) & \dots & K_{nn}(s) \end{bmatrix} \quad (36)$$

gdzie każda z funkcji $K_{ij}(s)$ jest funkcją wymierną przypisaną operatorowi K_{ij} , zgodnie z równaniem (19).

Wszystkie działania na operatorach K można teraz przenieść na ich

„transformaty Laplace'a” $K(s)$. Poddając przekształceniu Laplace'a równość (35) można łatwo określić macierz transformat odpowiadającą operatorowi odwrotnemu

$$K^{-1}(s) = \begin{bmatrix} K_{11}(s) & \dots & K_{1n}(s) \\ \dots & \dots & \dots \\ K_{n1}(s) & \dots & K_{nn}(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{\det K(s)} \begin{bmatrix} D_{11}(s) & \dots & D_{n1}(s) \\ D_{12}(s) & \dots & D_{n2}(s) \\ \dots & \dots & \dots \\ D_{1n}(s) & \dots & D_{nn}(s) \end{bmatrix} \quad (37)$$

gdzie $D_{ij}(s)$ są względnymi dopełnieniami algebraicznymi elementów $K_{ij}(s)$. $K^{-1}(s)$ ma oczywiście sens w przypadku, gdy $\det K(s) \neq 0$. Ponieważ $\det K(s)$ i $D_{ij}(s)$ są funkcjami wymiernymi, więc nierówność

$$\det K(s) \neq 0 \quad (38)$$

jest warunkiem koniecznym i wystarczającym dla istnienia operatora odwrotnego K^{-1} .

Innym problemem jest określenie warunków, dla których K^{-1} jest operatorem ograniczonym. W szczególnym przypadku, gdy K jest operatorem ograniczonym, to na to, aby K^{-1} było ograniczone, trzeba i wystarczy, aby $\det K(s) \neq 0$ dla $\operatorname{Re} s \geq 0$.

Operator sprzężony do operatora K wyznaczymy z tożsamości

$$(Kx, z) = (x, K^*z). \quad (39)$$

Korzystając z (35) oraz (16) mamy

$$\begin{aligned} (Kx, z) &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n K_{ij} x_j, z_i \right)_H = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (K_{ij} x_j, z_i)_H = \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n (x_j, K_{ij}^* z_i)_H = \sum_{j=1}^n (x_j, \sum_{i=1}^n K_{ij}^* z_i)_H = (x, K^*z). \end{aligned}$$

Stąd

$$K^* = \begin{pmatrix} K_{11}^* & K_{21}^* & \dots & K_{n1}^* \\ K_{12}^* & K_{22}^* & \dots & K_{n2}^* \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{1n}^* & K_{2n}^* & \dots & K_{nn}^* \end{pmatrix} \quad (40)$$

gdzie K_{ij}^* są odpowiednio operatorami sprzężonymi do K_{ij} w przestrzeni H . Macierz „transformat Laplace'a” $K^*(s)$ jest macierzą transponowaną funkcji $\overline{K_{ij}(s)}$ sprzężonych względem $K_{ij}(s)$.

Podobnie jak w H , widmem operatora K w przestrzeni H_n nazywamy zbiór liczb zespolonych λ , dla których $(\lambda I - K)^{-1}$ jest operatorem nieograniczonym.

Twierdzenie. Jeżeli K jest operatorem ograniczonym, to

$$S_p(K) = \{ \lambda : \det [\lambda I - K(s)] = 0 \quad \text{dla} \quad \operatorname{Re} s \geq 0 \} \quad (41)$$

(twierdzenie to jest natychmiastowym wnioskiem z uwagi o operatorze odwrotnym do ograniczonego).

Widmo operatora ograniczonego K jest więc zbiorem zer wielomianów $W_s(\lambda) = \det [\lambda I - K(s)]$ dla wszystkich s z półpłaszczyzny $\operatorname{Re} s \geq 0$. Jeżeli K jest operatorem ograniczonym, to widmo $Sp(K)$ jest zbiorem również ograniczonym przez promień spektralny

$$|K|_{sp} = \sup_{\lambda \in Sp(K)} |\lambda|. \quad (42)$$

Własności 2. 3. i 5. widma, sformułowane dla operatora w przestrzeni H pozostają prawdziwe również dla operatora w przestrzeni H_n .

Zajmiemy się teraz obliczeniem normy operatora ograniczonego. Jak wiadomo, w każdej przestrzeni Hilberta $\|K\| = \sup_{\|x\|=\|y\|=1} |(Kx, y)|$. Korzystając z tego, mamy

$$\|K\|^2 = \sup_{\|x\|=1} (Kx, Kx) = \sup_{\|x\|=1} (K^*Kx, x) \leq \sup_{\|x\|=\|y\|=1} |(K^*Kx, y)| = \|K^*K\|.$$

Ponieważ, z drugiej strony, $\|K^*K\| \leq \|K^*\| \cdot \|K\| = \|K\|^2$ więc ostatecznie

$$\|K\|^2 = \|K^*K\|. \quad (43)$$

W szczególności, gdy operator A jest samosprzężony, to $\|A^2\| = \|A\|^2$ (a stąd $\|A^{2^n}\| = \|A\|^{2^n}$). Ponieważ w każdej przestrzeni Banacha i dla każdego operatora ograniczonego A istnieje granica $\lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$ równa promieniowi spektralnemu $|A|_{sp}$, więc w szczególności gdy A jest samosprzężone, to $|A|_{sp} = \|A\|$.

Operator K^*K jest samosprzężony, więc ostatecznie

$$\|K\| = \sqrt{|K^*K|_{sp}}. \quad (44)$$

Inaczej mówiąc, $\|K\| = \sup_{\lambda \in Sp(K^*K)} \sqrt{\lambda}$, natomiast $S_p(K^*K)$ jest zbiorem zer wielomianów $W_s^*(\lambda) = \det(\lambda I - K^*(s)K(s))$ dla wszystkich $\operatorname{Re} s \geq 0$.

Obliczmy dla przykładu normę operatora ograniczonego

$$K = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix} \quad (45)$$

w przestrzeni H_2 . Korzystając z postaci macierzy $K^*(s)K(s)$:

$$\begin{aligned} K^*(s)K(s) &= \begin{pmatrix} \overline{K_{11}(s)} & \overline{K_{21}(s)} \\ \overline{K_{12}(s)} & \overline{K_{22}(s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_{11}(s) & K_{12}(s) \\ K_{21}(s) & K_{22}(s) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} |K_{11}(s)|^2 + |K_{21}(s)|^2 & \overline{K_{11}(s)}K_{12}(s) + \overline{K_{21}(s)}K_{22}(s) \\ \overline{K_{12}(s)}K_{11}(s) + \overline{K_{22}(s)}K_{21}(s) & |K_{12}(s)|^2 + |K_{22}(s)|^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

otrzymamy wielomian

$$W_s^*(\lambda) = \det(\lambda I - K^*(s)K(s)) = \lambda^2 - 2\sigma\lambda + \Delta^2, \quad (46)$$

gdzie

$$\sigma(s) = \frac{1}{2} (|K_{11}(s)|^2 + |K_{12}(s)|^2 + |K_{21}(s)|^2 + |K_{22}(s)|^2), \quad (47)$$

$$\Delta^2(s) = \det(K^*(s)K(s)) = |\det K(s)|^2 = |K_{11}(s)K_{22}(s) - K_{12}(s)K_{21}(s)|^2.$$

Przyrównując $W_s^*(\lambda)$ do zera, otrzymamy

$$\lambda \pm \sigma = \sigma \pm \sqrt{\sigma^2 - \Delta^2}. \quad (48)$$

Ponieważ $\Delta \leq \sigma$, więc zera wielomianu $W(\lambda)$ spełniają nierówność

$$0 \leq \lambda_- \leq \sigma \leq \lambda_+ \leq 2\sigma. \quad (49)$$

Największa z wartości λ_+ dla $s = iw$, $-\infty \leq w \leq +\infty$ jest kwadratem normy operatora K :

$$\|K\|^2 = \sup_w [\sigma(iw) + \sqrt{\sigma^2(iw) - \Delta^2(iw)}] \quad (50)$$

Z nierówności (49) wynika łatwe oszacowanie normy K jako

$$\|K\|^2 \leq \sup_w 2\sigma(iw) \leq \|K_{11}\|^2 + \|K_{12}\|^2 + \|K_{21}\|^2 + \|K_{22}\|^2,$$

gdzie po prawej stronie nierówności normy operatorów brane są w przestrzeni H .

Na zakończenie wykazemy, że operator K określony na zbiorze wektorów $x(t)$ rzeczywistych należących do H_n zachowuje swoją normę. Niech x_0 będzie elementem przestrzeni H_n o normie $\|x_0\| = 1$, dla którego $\|Kx\|$ osiąga (na kuli jednostkowej) swój kres górny $\|Kx_0\| = \|K\|$. Ponieważ $Kx_0 = \overline{Kx_0}$, więc również $\|K\overline{x_0}\| = \|K\|$. Z rozważań poprzedzających (43) wynika, że dla punktu x_0 ($\|x_0\| = 1$) mamy $\|K^*Kx_0\| = \|K^*K\|$, a wektory K^*Kx_0 i x_0 są równoległe. Wobec tego z warunku $(x_p, x_0) = 0$ wynika, że $(x_p, K^*Kx_0) = (Kx_p, Kx_0) = 0$.

Przedstawmy teraz wektor \bar{x}_0 w postaci $\bar{x}_0 = ax_0 + \beta x_p$, gdzie $(x_p, x_0) = 0$ i $\|x_p\| = 1$. Rozkład taki jest zawsze możliwy i jednoznaczny; a jest określone przez równość $a = (\bar{x}_0, x_0)$, natomiast $\beta x_p = \bar{x}_0 - ax_0$. Mamy ponadto równość $|a|^2 + |\beta|^2 = 1$. Z równości

$$\|K\|^2 = \|K(ax_0 + \beta x_p)\|^2 = |a|^2 \|Kx_0\|^2 + |\beta|^2 \|Kx_p\|^2$$

wynika, że również $\|Kx_p\| = \|K\|$.

Założmy teraz, że $a \neq -1$ i utwórzmy wektor

$$z = \frac{x_0 + \bar{x}_0}{\sqrt{2 \operatorname{Re}(1+a)}},$$

który jest rzeczywistym i, jak łatwo sprawdzić, ma normę równą jedności.

Norma Kz wynosi

$$\begin{aligned}\|Kz\|^2 &= \frac{1}{2 \operatorname{Re}(1+a)} \left\| K((1+a)x_0 + \beta x_p) \right\|^2 = \\ &= \frac{|1+a|^2}{2 \operatorname{Re}(1+a)} \|Kx_0\|^2 + |\beta|^2 \|Kx_p\|^2 = \|K\|^2\end{aligned}$$

a więc istnieje w przestrzeni H_n wektor z ($\|z\|=1$) będący funkcją rzeczywistą, dla którego $\|Kz\|=\|K\|$.

W przypadku $a=-1$, x_0 jest funkcją urojoną i jeżeli przyjmujemy $z=ix_0$, to również $\|Kz\|=\|K\|$.

Jeżeli więc wszystkie rozważania ograniczymy do przestrzeni funkcji rzeczywistych należących do H_n , to norma operatora określonego na tym zbiorze nie zmienia się.

4. WŁASNOŚCI OPERATORÓW NIELINIOWYCH

Niech układ elektryczny zawiera n członów nieliniowych. Przebieg y_i na wyjściu i -tego członu nieliniowego jest nieliniową funkcją rzeczywistą n przebiegów wejściowych



Rys. 4. Schemat blokowy elementu nieliniowego.

$$y_i = f_i(x) = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (51)$$

O funkcjach $f_i(x)$ założymy, że są wielomianami o znikającym wyrazie stopnia zerowego ($f_i(0, \dots, 0) = 0$)⁵

$$f_i(x) = \sum_{k_1 + \dots + k_n = 1}^N C_{k_1, \dots, k_n} x_1^{k_1} \cdot x_2^{k_2} \cdot \dots \cdot x_n^{k_n}, \quad (52)$$

Każdą z funkcji $f_i(x)$ można zatem przedstawić w postaci

$$f_i(x) = a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n + \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (53)$$

gdzie $\varphi_i(x)$ jest wielomianem o wyrazach stopnia większego od jedności.

Układ równości (53) zapisać można w symbolice macierzowej

$$\begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \dots \\ f_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \\ \dots \\ \varphi_n(x) \end{pmatrix}$$

lub krótko

$$f(x) = ax + \varphi(x), \quad (54)$$

⁵ Jak wynika z tw. Weierstrassa, każda funkcja ciągła w skończonym obszarze, znikająca w zerze, może być z dowolną dokładnością (w sensie zbieżności jednostajnej) aproksymowana przez wielomiany o postaci (52).

gdzie a jest macierzą kwadratową (a_{ij}) , natomiast $x=(x_1 \dots x_n)$, $f(x)=(f_1(x) \dots f_n(x))$ i $\varphi(x)=(\varphi_1(x) \dots \varphi_n(x))$ wektorami.

Rozpatrzmy szczególny przypadek, gdy $\det a \neq 0$. Równość (54) można wtedy przepisać w postaci

$$f(x)=a(x+\psi(x)), \quad (55)$$

gdzie $\psi(x)=a^{-1}\varphi(x)$.

Weźmy teraz w rzeczywistej przestrzeni $n+1$ — wymiarowej prostokątny układ współrzędnych x_1, x_2, \dots, x_n, z i rozpatrzmy w nim hiperpowierzchnię o równaniu

$$z=\sqrt{\sum_{i=1}^n [x_i + \psi_i(x_1, \dots, x_n)]^2}. \quad (56)$$

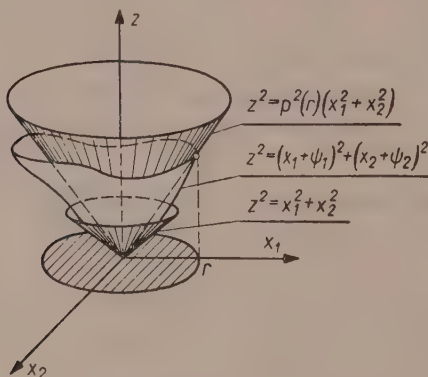
Ponieważ funkcje $\psi_i(x)$ są wielomianami nie zawierającymi wyrazów stopnia niższego niż 2, więc hiperpowierzchnia (56) jest w początku układu współrzędnych styczna do stożka

$$z=\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \quad (57)$$

(o kącie rozwarcia 90°).

Oznaczmy przez $p(r)$ najmniejszą z liczb $p^*(r)$ takich; że dla wszystkich punktów hiperpłaszczyzny x_1, x_2, \dots, x_n mieszczących się w kole $\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 = r^2\right)$ o promieniu r zachodzi nierówność

$$\sum_{i=1}^n [x_i + \psi_i(x_1, \dots, x_n)]^2 \leq p^{*2}(r) \sum_{i=1}^n x_i^2. \quad (58)$$



Rys. 5. Przykładowy wykres powierzchni opisanej równaniem 56 i stożków $z^2 = \sum x_i^2$, $z^2 = p^2(r) \sum x_i^2$ dla $n=2$.

Funkcja $p(r)$ jest oczywiście niemalejącą, nie mniejszą od jedności ($p(r) \rightarrow 1$ przy $r \rightarrow 0$). Hiperpowierzchnia $z=p(r) \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ jest stożkiem

(o kącie rozwarcia 2α , gdzie $\operatorname{ctg} \alpha = p(r)$), ograniczającym od góry hiperpowierzchnię (56) w kole $\sum_{i=1}^n x_i^2 \leq r^2$.

Podobnie jak w poprzednim przypadku, oznaczmy przez $q(r)$ najmniejszą z liczb $q^*(r)$ taką, że dla wszystkich punktów hiperpłaszczyzny x_1, \dots, x_n spełniających nierówność $\sum_{i=1}^n x_i^2 \leq r^2$ mamy

$$\sum_{i=1}^n \psi_i^2(x_1, \dots, x_n) \leq q^{*2}(r) \sum_{i=1}^n x_i^2. \quad (59)$$

Funkcja $q(r)$ jest również niemalejąca, przy czym $q(r) \rightarrow 0$ dla $r \rightarrow 0$.

Hiperpowierzchnia $z = \sqrt{\sum_{i=1}^n \psi_i^2(x_1, \dots, x_n)}$ jest styczna w początku układu współrzędnych do hiperpłaszczyzny x_1, x_2, \dots, x_n (i może być nawet ograniczona od góry przez paraboloidę $z = c \sum_{i=1}^n x_i^2$).

W przypadku przestrzeni jednowymiarowej, gdy $f(x) = f_1(x)$ to nierówności (58) i (59) sprowadzają się do

$$|x + \psi(x)| \leq p(r)|x|, \quad |\psi(x)| \leq q(r)|x|$$

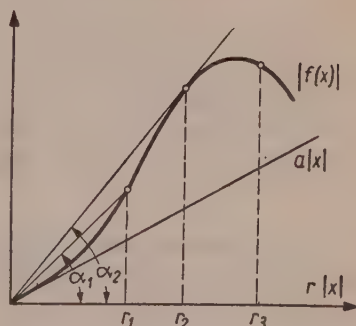
i wtedy

$$p(r) = \sup_{|x| \leq r} \left| \frac{x + \psi(x)}{x} \right| = \frac{1}{|a|} \sup_{|x| \leq r} \left| \frac{f(x)}{x} \right| = \sup_{|x| \leq r} \left| 1 + \frac{\varphi(x)}{ax} \right| \quad (60)$$

$$q(r) = \sup_{|x| \leq r} \left| \frac{\psi(x)}{x} \right| = \frac{1}{|a|} \sup_{|x| \leq r} \left| \frac{\varphi(x)}{x} \right|.$$

Wielkości $p(r)$ i $q(r)$ można łatwo znaleźć bezpośrednio z wykresu funkcji $f(x)$. Np. dla funkcji $f(x)$ nieparzystej na rys. 6 podany jest sposób otrzymywania funkcji $|a|p(r)$. Dla oznaczeń jak na rysunku, mamy $|a|p(r_1) = \operatorname{tg} \alpha_1$, $|a|p(r_2) = |a|p(r_3) = \operatorname{tg} \alpha_2$. W ten sam sposób z wykresu funkcji $\varphi(x)$ otrzymać można $|a|q(r)$.

Ze wzorów (60) wynikają ponadto proste wnioski:



Rys. 6. Ilustracja do graficznej metody otrzymywania funkcji $p(r)$

1. jeżeli $-2 \leq \frac{\varphi(x)}{ax} \leq 0$ dla $|x| \leq r$, to $p(r) = 1$,

2. jeżeli $\frac{\varphi(x)}{ax} \geq 0$ dla $|x| \leq r$, to $p(r) = 1 + q(r)$.

Niech x oznacza teraz zbiór funkcji rzeczywistych

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \quad (61)$$

będący elementem przestrzeni H_n .

Układ funkcji (51) wyznacza teraz pewien operator nieliniowy f określony na H_n . Ponieważ funkcje $f_i(x)$ są wielomianami, więc wartość operatora

$$fx = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)) \quad (62)$$

jest również elementem przestrzeni H_n . Łatwo również sprawdzić, że jeżeli θ jest zerem przestrzeni H_n , to $f(x + \theta) = fx$.

Zgodnie z (54) operator f (w przypadku, gdy $\det a \neq 0$) można przedstawić w postaci:

$$f = a + \varphi = a(I + \psi), \quad (63)$$

gdzie a jest operatorem liniowym (macierzą liczbową), I — tożsamościowym, natomiast

$$\psi x = a^{-1}\varphi x = [\psi_1(x), \dots, \psi_n(x)].$$

Wydzielmy w przestrzeni H_n podzbiór $S(r)$ elementów, dla których spełniona jest nierówność ⁶

$$\sup_{0 < t < \infty} \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i(t)|^2} \leq r. \quad (64)$$

Zbiór $S(r)$ zawiera się w kuli o promieniu r , ponieważ

$$\|x\|^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{i=1}^n |x_i(t)|^2 dt \leq \sup_{0 < t < \infty} \sum_{i=1}^n |x_i(t)|^2, \quad (65)$$

a więc z $x \in S(r)$ wynika, że $\|x\| \leq r$. Istnieją jednak w kuli $\|x\| \leq r$ elementy nie należące do $S(r)$.

Korzystając z nierówności (58) można w prosty sposób oszacować normę elementu $(I + \psi)x$ dla $x \in S(r)$:

$$\begin{aligned} \|(I + \psi)x\|^2 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{i=1}^n [x_i(t) + \psi_i(x_1(t), \dots, x_n(t))]^2 dt \\ &\leq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T p^2(r) \sum_{i=1}^n x_i^2(t) dt = p^2(r) \|x\|^2. \end{aligned}$$

Stąd ostatecznie

$$\|(I + \psi)x\| \leq p(r) \|x\| \quad \text{dla} \quad x \in S(r). \quad (66)$$

⁶ Zgodnie z (12), funkcje $x_i(t)$ mają tu postać $\operatorname{Re} \sum_{\nu} c_{\nu} e^{i\omega_{\nu} t}$.

W ten sam sposób można wykazać, że

$$\|\psi x\| \leq q(r) \|x\| \quad \text{dla} \quad x \in S(r). \quad (67)$$

Nierówności (66) i (67) grają w dalszych zastosowaniach bardzo ważną rolę.

5. WARUNKI STABILNOŚCI UKŁADU

Rozpatrzmy teraz w przestrzeni H_n równanie

$$\lambda x = Kfx \quad (68)$$

(opisujące własności układu elektrycznego), gdzie K jest operatorem liniowym (nie necessarily ograniczonym) i $\det a \neq 0$.

Ustalimy konieczne warunki istnienia niezerowych rozwiązań równania (68) w zbiorze $S(r)$. Niech x należy do $S(r)$ i będzie rozwiązaniem równania (68). Wtedy

$$|\lambda| \|x\| = \|Ka(I + \psi)x\| \leq \|Ka\| p(r) \|x\|,$$

a stąd dla $\|x\| \neq 0$ mamy

$$\|Ka\| p(r) \geq |\lambda|. \quad (69)$$

W szczególnym przypadku, gdy λ jest wartością regularną operatora Ka , równanie (68) można przepisać w postaci $\lambda x - Kax = Ka\psi x$ i ostatecznie

$$x = (\lambda - Ka)^{-1} Ka\psi x. \quad (70)$$

Jeżeli teraz x należy do $S(r)$ i jest rozwiązaniem równania (70), to

$$\|x\| \leq \|(\lambda - Ka)^{-1} Ka\| q(r) \|x\|$$

i dla $\|x\| \neq 0$ koniecznym warunkiem istnienia rozwiązania jest

$$\|(\lambda - Ka)^{-1} Ka\| q(r) \leq 1. \quad (71)$$

Z zaprzeczenia warunków koniecznych (69) i (71) wynikają bardzo istotne wnioski:

1. jeżeli λ jest wartością regularną operatora ograniczonego Ka , to równanie (68) nie ma małych rozwiązań własnych; to znaczy, dla dostatecznie małych r istnieje taki zbiór $S(r)$, w którym nie ma (z wyjątkiem zerowego) rozwiązań równania (68);

2. jeżeli $p(r) = 1$, to dla $|\lambda| < \|Ka\|$ równanie (68) nie ma rozwiązań w żadnym ze zbiorów $S(r)$ dla dowolnego r .

Nazwijmy obszarem stabilności energetycznej zbiór punktów płaszczyzny $\left(\frac{1}{\lambda}, r\right)$ takich, że dla parametru λ (rzeczywistego) równanie (68) nie ma rozwiązań własnych w zbiorze $S(r)$.

Jak wynika z poprzednich rozważań punkty $\left(\frac{1}{\lambda}, r\right)$ spełniające co najmniej jedną z nierówności

$$\|Ka\| p(r) < |\lambda|, \quad (72)$$

$$\|(\lambda I - Ka)^{-1} Ka\| q(r) < 1 \quad (73)$$

należą do obszaru stabilności energetycznej.

Fizyczna interpretacja obszaru stabilności jest następująca. Jeżeli punkt $\left(\frac{1}{\lambda}, r\right)$ leży w obszarze stabilności energetycznej, to układ elektryczny przy współczynniku wzmocnienia $\frac{1}{\lambda}$ nie może generować drgań ustalonych (których moc byłaby różna od zera), mających amplitudy $\left(\sup_{0 < t < \infty} \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i(t)|^2}\right)$ nie większe od r .

W szczególnym przypadku przestrzeni jednowymiarowej normy operatorów łatwo jest wyznaczyć przez ich promienie spektralne jako

$$\|Ka\| = |a| \sup_{w \in Sp(K)} |w| = \frac{|a|}{\inf_{w \in Sp(K)} \left| \frac{1}{w} \right|}.$$

Podobnie operator $(\lambda I - Ka)^{-1} Ka = (\lambda(Ka)^{-1} - 1)^{-1}$ ma normę

$$\|(\lambda I - Ka)^{-1} Ka\| = \sup_{w \in Sp(K)} \left| \frac{1}{\frac{\lambda}{a} \frac{1}{w} - 1} \right| = \left| \frac{a}{\lambda} \right| \frac{1}{\inf_{w \in Sp(K)} \left| \frac{1}{w} - \frac{a}{\lambda} \right|}.$$

Nierówności (72) i (73) przyjmą teraz postać

$$|a| p(r) < |\lambda| \inf_{w \in Sp(K)} \left| \frac{1}{w} \right|, \quad (74)$$

$$|a| q(r) < |\lambda| \inf_{w \in Sp(K)} \left| \frac{1}{w} - \frac{a}{\lambda} \right|. \quad (75)$$

Widmo operatora K w jednowymiarowej przestrzeni otrzymuje się bezpośrednio z pętli Nyquista dla funkcji $K(s)$.

Równanie $\lambda x = Kfx$, gdy $\det a = 0$, nie może być rozpatrywane tak jak w poprzednim przypadku, gdyż nie jest określony operator ψ . Wprowadźmy więc dla funkcji φ liczbę $q_0(r)$ taką, aby — podobnie jak w (59)

— dla wszystkich $\sum_{i=1}^n x_i^2 \leq r^2$ spełniona była nierówność

$$\sum_{i=1}^n |\varphi_i(x_1, \dots, x_n)|^2 \leq q_0^2(r) \sum_{i=1}^n x_i^2. \quad (76)$$

Operator nieliniowy φ spełnia wtedy w zbiorze $S(r)$ warunek

$$\|\varphi x\| \leq q_0(r) \|x\|. \quad (77)$$

Jeżeli przepiszemy teraz równanie (68) w postaci $\lambda x = Kax + K\varphi x$ i założymy, że ma ono niezerowe rozwiązania w zbiorze $S(r)$, to otrzymamy warunek konieczny istnienia rozwiązania

$$|\lambda| \leq \|Ka\| + \|K\| q_0(r). \quad (78)$$

Podobnie dla λ , będącego wartością regularną operatora Ka , mamy analogiczny do (71) konieczny warunek istnienia niezerowych rozwiązań w postaci

$$\|(\lambda I - Ka)^{-1}K\| q_0(r) \geq 1. \quad (79)$$

Warunki wystarczające nieistnienia rozwiązań (niezerowych) równania (68) otrzymamy zaprzeczając nierównościom (78) i (79). Ponieważ nierówność (78) ma znaczenie jedynie dla $|\lambda| > \|Ka\|$, a w tym przypadku $\|(\lambda I - Ka)^{-1}K\| \leq \frac{\|K\|}{|\lambda| - \|Ka\|}$, więc ostatecznie z zaprzeczenia nierówności (78) wynika nierówność przeciwna do (79).

Obszar stabilności energetycznej jest więc w przypadku $\det a = 0$ zbiorem punktów $\left(\frac{1}{\lambda}, r\right)$, dla których zachodzi nierówność

$$\|(\lambda I - Ka)^{-1}K\| q_0(r) < 1. \quad (80)$$

W szczególnym przypadku przestrzeni jednowymiarowej operator Ka jest tożsamościowo równy zeru i warunek (80) sprowadzi się do następującego

$$\|K\| q_0(r) < |\lambda|. \quad (81)$$

6. UWAGI KOŃCOWE

Na zakończenie należałoby jeszcze omówić, w jakim stosunku pozostaje przedstawiona tu metoda do klasycznych metod Lapunowa oraz do metody podanej w pracy [2].

Porównanie przeprowadzimy na przykładzie układów z jednym elementem nieliniowym i z jedną pętlą sprzężenia zwrotnego, gdyż tylko takie rozważane były w [2]. Zasadnicza różnica polega na wyborze innej przestrzeni funkcyjnej. Operowanie przestrzenią $C_{(0, \infty)}$ pozwalało badać stabilność również układów parametrycznych (istniały tylko trudności w określeniu widma i normy operatora liniowego), gdy tymczasem prze-

strzenie C/N i H nadają się jedynie do układów o elementach nie zmieniających się w czasie.

Widmo operatora K we wszystkich rozpatrywanych przestrzeniach jest identyczne i obejmuje (dla układów nieparametrycznych) obszar objęty przez pętlę Nyquista dla funkcji $K(s)$. Wobec tego każda z tych trzech metod pozwala na udowodnienie twierdzenia, że ze stabilności układu linearyzowanego wynika stabilność układu nieliniowego dla dostatecznie małych amplitud. Ten sam wniosek wynika również z pierwszej metody Lapunowa. Jeżeli więc badamy stabilność układu dla małych amplitud, to wszystkie metody prowadzą do podobnych wniosków (które nie są jednak identyczne ze względu na różnice w definicjach stabilności).

Poważniejsze różnice przy oszacowaniu obszarów stabilności asymptotycznej i energetycznej wynikają dopiero dla dużych amplitud. (Przez amplitudę w obu przestrzeniach C/N i H rozumiemy tu tę samą wielkość $\lim_{T \rightarrow \infty} \sup_{t > T} |x(t)|$, równą $\|x\|_{C/N}$ w przestrzeni C/N i promieniowi zbioru $S(r)$ w przestrzeni H).

Jak wiadomo, obszary stabilności asymptotycznej i energetycznej szacowane są za pomocą norm operatorów liniowych, przy czym im mniejsze są te normy, tym większy jest obszar stabilności. Olbrzymią zaletą przestrzeni H jest fakt, że norma operatora liniowego w H jest najmniejszą spośród norm branych we wszystkich innych przestrzeniach, byleby takich, w których widmo operatora nie ulegnie zmianie⁷. Zmniejszenie normy operatora liniowego K przez dobór jakiejś innej przestrzeni E łączyłoby się z faktem zmniejszenia widma K (w E). Przestrzeń E , wobec tego, nie nadawałaby się do badania stabilności, gdyż wnioski wyciągnięte dla układów liniowych mówiłyby, że układ o funkcji przenoszenia mającej bieguny w prawej półpłaszczyźnie jest stabilny w sensie definicji stabilności indukowanej przez przestrzeń E . Taka definicja stabilności byłaby więc nie do przyjęcia.

Istnieje wiele prostych metod (opartych głównie na transformacji Laplace'a) pozwalających badać stabilność układów liniowych. Wszystkie te metody mogą być wykorzystane do określania widma operatora K opisującego układ linearyzowany. Ważnym jest, że w przestrzeni H norma operatora wyraża się przez jego promień spektralny. W przestrzeniach $C_{(0,\infty)}$ i C/N promień spektralny szacuje normę od dołu, a potrzebne w praktyce oszacowanie normy od góry przez całkę $\int_0^\infty |k(t)| dt$ jest bardzo kłopotliwe.

Drugą istotną zaletą przestrzeni H jest fakt, że jest to przestrzeń Hil-

⁷ Istotnie zawsze $\|K\| \geq \|K\|_{sp}$, natomiast w $H: \|K\| = \|K\|_{sp}$.

berta, gdyż pojęcie iloczynu skalarnego ułatwia znacznie wiele rachunków nad operatorami liniowymi. Między innymi pozwoliło to uogólnić metodę na układy elektryczne wieloobwodowe, to jest układy z wieloma elementami nieliniowymi i wieloma pętlami sprzężenia zwrotnego. Stosunkowo łatwe stało się obliczenie normy macierzy operatorów w przestrzeniach wielowymiarowych przez uzależnienie jej od widma innego operatora.

Pomimo, że możliwe jest uogólnienie badań stabilności asymptotycznej (w przestrzeni C/N) na układy wieloobwodowe, to jednak istniałyby poważne trudności, nie tylko w obliczeniu, ale i w oszacowaniu normy macierzy operatorów.

Przestrzeń H posiada jednak w stosunku do C/N dość istotne wady. Przede wszystkim założyliśmy na wstępie, że przebiegi elektryczne $x(t)$ w rozpatrywanych przez nas układach są funkcjami prawie okresowymi (z dokładnością do funkcji o znikającej normie $\|\cdot\|_H$). Założenie to wydaje się w pełni usprawiedliwione, ponieważ nie znamy układów elektrycznych nie spełniających go. Jednak ze względów formalnych należałoby udowodnić, że odpowiednie równania całkowe nie mogą mieć innych rozwiązań (np. w klasie funkcji ciągłych)⁸. Gdyby twierdzenie to okazało się prawdziwe, to definicje obszarów stabilności asymptotycznej i energetycznej byłyby równoważne (równoważne byłyby warunki: $\|x\|_{C/N} \leq r$ i $x \in S(r)$ oraz równości $\|x\|_{C/N} = 0$ i $\|x\|_H = 0$).

Przy badaniu stabilności asymptotycznej wykazano, że stabilny (λ nie należy do $Sp(K)$) układ elektryczny pobudzony małymi drganiami $z(t)$ (o małej normie $\|z\|_{C/N}$) np. okresowymi, przyłożonymi z zewnątrz do układu, daje odpowiedź $x(t)$ również o małej normie. Dowód tego twierdzenia opiera się na zasadzie odwzorowań przybliżających i wymaga zupełności przestrzeni oraz spełnienia w pewnej kuli warunku Lipschitza przez operator nieliniowy f . Tymczasem w przestrzeni H na ogół nie ma takiej kuli, w której operator nieliniowy spełniałby warunek Lipschitza. (Można wykazać, że warunek Lipschitza zachodzi w zbiorze $S(r)$, który nie zawiera w sobie żadnej kuli). Wobec tego nic nie można powiedzieć, czy układ pobudzony małymi drganiami $z(t)$ da odpowiedź $x(t)$ spełniającą nierówność $\|x\|_H \leq C\|z\|_H$ (gdzie C — stała). Wiadomo tylko, że z $\|z\|_H = 0$ wynika $\|x\|_H = 0$ i oprócz rozwiązania zerowego równanie nie ma w obszarze stabilności żadnych innych rozwiązań. Niemożliwość udowodnienia w przestrzeni H nierówności $\|x\| \leq C\|z\|$ dla małych $\|z\|$ jest chyba największą wadą przedstawionej metody.

⁸ W przeciwnym przypadku na podstawie metody badania układów w przestrzeni H nie można nic powiedzieć na temat, czy układ może generować drgania np. typu $x(t) = \sin \sqrt{t}$.

Porównanie przedstawionych metod przestrzeni $C_{(0,\infty)}$, C/N i H z klasycznymi metodami Lapunowa jest trudniejsze. Jeśli chodzi o wyniki uzyskane przy badaniu stabilności pierwszą metodą Lapunowa (linearyzacja układu nieliniowego), to pokrywają się one zupełnie z wynikami otrzymanymi w przestrzeni $C_{(0,\infty)}$. Metoda Lapunowa jest poza tym ogólniejsza ze względu na zakres zastosowań, pozwala bowiem również na efektywne badanie niektórych układów parametrycznych. Druga metoda Lapunowa, która — podobnie jak metody przestrzeni C/N i H — bada stabilność w dużym zakresie amplitud, wymaga zbudowania pewnej pomocniczej funkcji, przy pomocy której szacuje się zakres stabilności. Nie ma jednak ogólnych metod na wyznaczenie tej funkcji. Metody przestrzeni C/N i H dają natomiast przepis na efektywne wyznaczenie obszarów stabilności za pomocą łatwych do obliczenia norm operatorów. Poza tym dla złożonych układów elektrycznych otrzymujemy zazwyczaj równania, które bezpośrednio nadają się do badania metodami analizy funkcjonalnej; metody Lapunowa wymagają natomiast sprowadzenia ich do układu równań różniczkowych pierwszego rzędu.

WYKAZ LITERATURY

1. Bohr H.: *Almost periodic functions*. Chelsea Publishing Company. 1951.
2. Kudrewicz J.: *Badanie stabilności nieliniowych układów elektrycznych metodami analizy funkcjonalnej*. Arch. Elektrot. zeszyt 1 — 1961 r.
3. Lusternik L. A. i Sobolew W. I.: *Elementy analizy funkcjonalnej*. PWN. Warszawa 1959.

Dodatek I

1. Badanie stabilności obwodu rezonansowego szeregowego współpracującego z nieliniowym oporem ujemnym typu łukowego

Układ elektryczny przedstawiony na rys. 7 opisuje się równaniem

$$L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau + Ri + u(i) = 0, \quad (82)$$

gdzie $u(i)$ jest zadaną charakterystyką oporu ujemnego. Wprowadzamy oznaczenie $u(i) = \frac{1}{\lambda} f(i)$. Poddając równanie (82) przekształceniu Laplace'a otrzymamy

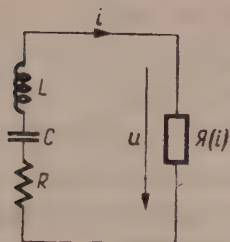
$$\left(sL + \frac{1}{sC} + R\right) \tilde{i}(s) = \frac{1}{\lambda} \mathcal{L}_i \{f[i(t)]\},$$

a stąd

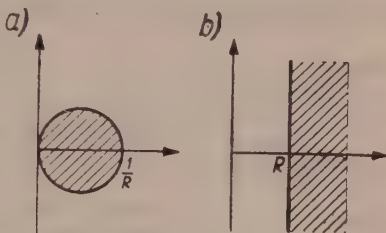
$$\lambda i(t) = \int_0^t k(t-\tau) f[i(\tau)] d\tau, \quad \text{gdzie} \quad k(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{R + sL + \frac{1}{sC}} \right]. \quad (83)$$

Widmo operatora liniowego $Kx = \int_0^t k(t-\tau)x(\tau)d\tau$ znajdujemy wykreślając pętlę

Nyquista dla funkcji $K(s) = \frac{1}{R+sL+\frac{1}{sC}}$. (Odwzorowując funkcją $K(s)$ prawą pół-



Rys. 7. Generator z oporem ujemnym typu łukowego.



Rys. 8. a) Widmo operatora K

$$\left(K(s) = R + sL + \frac{1}{sC}\right)^{-1},$$

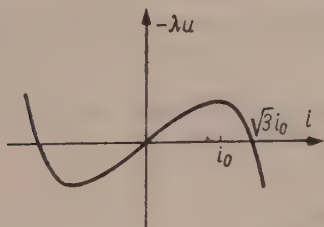
b) Wykres obszaru $1/Sp(K)$.

plaszczynę ($Re s \geq 0$). Wykres obszarów $Sp(K)$ i $1/Sp(K)$ podaje rys. 8. Stąd obliczamy: $\inf_{w \in Sp(K)} \left| \frac{1}{w} \right| = R$ i $\inf_{w \in Sp(K)} \left| \frac{1}{w} - \frac{1}{\lambda} \right| = R - \frac{1}{\lambda}$ [dla λ rzeczywistego i λ nie należy do $Sp(K)$]. Zgodnie z (74) i (75), jeżeli spełniona jest co najmniej jedna z nierówności:

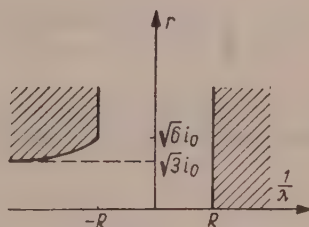
$$p(r) < |\lambda|R, \quad q(r) < |\lambda| \left(R - \frac{1}{\lambda}\right), \quad (84)$$

to układ jest stabilny energetycznie.

Niech dla przykładu charakterystyka nieliniowa wyraża się równaniem: $f(i) = -i - \frac{i^3}{3i_0^2}$ (rys. 9). Wówczas $p(r) = 1$ $q(r) = \frac{r^2}{3i_0^2}$, a obszar stabilności podany jest na rys. 10.



Rys. 9. Charakterystyka oporu nieliniowego (ujemnego).



Rys. 10. Wykres obszaru stabilności dla układu z rys. 7.

Wielkość $\frac{1}{\lambda}$ jest wartością oporności ujemnej dla $i=0$.

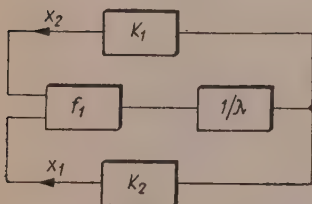
Jeżeli dwójnik LC zastąpimy dowolnym dwójnikiem reaktancyjnym Z, to

widmo operatora K [gdzie $K(s) = \frac{1}{R+Z(s)}$] nie zmieni się i w związku z tym nie zmieniają się warunki stabilności.

Dodatek II

Badanie stabilności układu z dwiema pętlami sprzężenia zwrotnego przez jeden element nieliniowy

Układ przedstawiony na rys. 11 opisać można układem równań



Rys. 11. Układ dwóch pętli sprzężenia zwrotnego przez jeden element nieliniowy.

$$\begin{aligned}\lambda x_1 &= K_1 f_1(x_1, x_2), \\ \lambda x_2 &= K_2 f_2(x_1, x_2).\end{aligned}\quad (85)$$

Założmy, że funkcja f_1 da się przedstawić w postaci

$$f_1(x_1, x_2) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \varphi(x_1, x_2), \quad (86)$$

gdzie $a_1^2 + a_2^2 \neq 0$ a φ jest w punkcie $(0,0)$ nieskończenie małą rzędu co najmniej drugiego.

Układ równań (85) zapisać można w postaci macierzowej

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_1 & 0 \\ K_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix},$$

gdzie f_2 może być zupełnie dowolną funkcją. Jeżeli przyjmiemy $f_2(x_1, x_2) = -a_2 x_1 + a_1 x_2$, to można napisać:

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ -a_2 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 + \psi_1 \\ x_2 + \psi_2 \end{pmatrix}, \quad \text{gdzie } \psi_1 = \frac{a_1 \varphi}{a_1^2 + a_2^2} \quad \psi_2 = \frac{a_2 \varphi}{a_1^2 + a_2^2}.$$

Operator nieliniowy $f = (f_1, f_2)$ można wobec tego przepisać w postaci $f = a(I + \psi)$, gdzie $\det a = a_1^2 + a_2^2 \neq 0$.

Operator nieliniowy charakteryzować będziemy, jak zwykle, dwiema funkcjami:

$$\begin{aligned}q(r) &= \sup_{x_1^2 + x_2^2 \leq r^2} \sqrt{\frac{\psi_1^2 + \psi_2^2}{x_1^2 + x_2^2}} = \sup_{x_1^2 + x_2^2 \leq r^2} \frac{|\varphi(x_1, x_2)|}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \\ p(r) &= \sup_{x_1^2 + x_2^2 \leq r^2} \sqrt{\frac{(x_1 + \psi_1)^2 + (x_2 + \psi_2)^2}{x_1^2 + x_2^2}} = \sup_{x_1^2 + x_2^2 \leq r^2} \sqrt{1 + \frac{\varphi(2f - \varphi)}{(a_1^2 + a_2^2)(x_1^2 + x_2^2)}}.\end{aligned}\quad (87)$$

Jeżeli $\varphi(2f - \varphi) < 0$, to $p(r) = 1$, w przeciwnym przypadku $p(r) > 1$.

Obliczmy teraz widmo i normę operatora Ka

$$Ka = \begin{pmatrix} K_1 a_1 & K_1 a_2 \\ K_2 a_1 & K_2 a_2 \end{pmatrix},$$

Widmo Ka jest zbiorem tych wartości λ , dla których funkcja $W_s(\lambda) = \det(\lambda I - K(s) \cdot a)$ ma zera w półpłaszczyźnie $\operatorname{Re} s \geq 0$

$$W_s(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - a_1 K_1(s) & -a_2 K_1(s) \\ -a_1 K_2(s) & \lambda - a_2 K_2(s) \end{vmatrix} = \lambda [\lambda - (a_1 K_1(s) + a_2 K_2(s))].$$

Stąd $S_p(Ka) = \{ \lambda : \lambda = a_1 K_1(s) + a_2 K_2(s) \text{ dla } \operatorname{Re} s \leq 0 \}.$

Jeżeli zauważymy, że $\det(K(s)a)=0$, to korzystając ze wzoru (50) wyznaczymy normę operatora Ka jako

$$\|Ka\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \sup_{\operatorname{Re} s \geq 0} \sqrt{|K_1(s)|^2 + |K_2(s)|^2}.$$

Wyznamy jeszcze operator $(\lambda I - Ka)^{-1}Ka$

$$[\lambda I - K(s)a]^{-1}K(s)a = \frac{1}{\lambda[\lambda - a_1 K_1(s) - a_2 K_2(s)]} \begin{bmatrix} \lambda a_1 K_1(s) & \lambda a_2 K_1(s) \\ \lambda a_1 K_2(s) & \lambda a_2 K_2(s) \end{bmatrix}.$$

Stąd norma operatora $(\lambda I - Ka)^{-1}Ka$ wynosi

$$\|(\lambda I - Ka)^{-1}Ka\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \sup_{\operatorname{Re} s \geq 0} \frac{\sqrt{|K_1(s)|^2 + |K_2(s)|^2}}{|\lambda - a_1 K_1(s) - a_2 K_2(s)|}.$$

Obliczone wielkości pozwalają już na wyznaczenie nierówności określających obszar stabilności energetycznej

$$\begin{aligned} \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \sup_{\operatorname{Re} s \geq 0} |A(s)|p(r) &< |\lambda|, \\ \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \sup_{\operatorname{Re} s \geq 0} \frac{A(s)}{|B(\lambda, s)|} q(r) &< 1, \end{aligned} \quad (88)$$

gdzie $A(s) = \sqrt{|K_1(s)|^2 + |K_2(s)|^2}$, $B(\lambda, s) = \lambda - a_1 K_1(s) - a_2 K_2(s)$.

Na zakończenie wspomniemy o szczególnym przypadku: $a_1^2 + a_2^2 = 0$. Układ równań (85) przyjmie wtedy postać

$$\lambda x = K \varphi x \quad (89)$$

i obszar stabilności energetycznej określony będzie nierównością

$$|\lambda| > \|K\| q(r),$$

a korzystając z tego, że $\|K\| = \sup_{\operatorname{Re} s \geq 0} A(s)$ otrzymamy

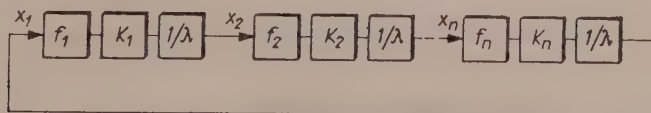
$$|\lambda| > q(r) \cdot \sup_{\operatorname{Re} s \geq 0} A(s), \quad (90)$$

Ponieważ $q(r) \rightarrow 0$ przy $r \rightarrow 0$ więc dla dostatecznie małych r układ jest stabilny dla każdego $\lambda \neq 0$.

Dodatek III

Badanie stabilności układu z jedną pętlą sprzężenia zwrotnego

Układ przedstawiony na rys. 12 opisać można układem równań:



Rys. 12. Układ z wieloma elementami nieliniowymi w jednej pętli sprzężenia zwrotnego.

$$\begin{aligned} \lambda x_1 &= K_n f_n x_n, \\ \lambda x_2 &= K_1 f_1 x_1, \\ &\dots\dots\dots \\ \lambda x_n &= K_{n-1} f_{n-1} x_{n-1} \end{aligned} \quad (91)$$

lub równoważnym mu równaniem operatorowym w przestrzeni H_n

$$\lambda x = Kfx,$$

gdzie $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ jest wektorem przestrzeni H_n , f jest operatorem nieliniowym $fx = (f_1 x_1, f_2 x_2, \dots, f_n x_n)$, natomiast K jest macierzą operatorów

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & K_n \\ K_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & K_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & K_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \quad (92)$$

Mogą zaistnieć dwa przypadki:

- a) wszystkie funkcje $f_i(x_i)$ mają w punkcie $x_i=0$ nieznikające pochodne,
- b) co najmniej jedna z funkcji $f_i(x_i)$ ma w zerze pochodną równą zero.

Zajmiemy się dokładniej przypadkiem a). Bez zmniejszenia ogólności rozważań można przyjąć, że pochodne funkcji $f_i(x_i)$ w zerze wynoszą 1 i wtedy

$$f_i(x_i) = x_i + \psi_i(x_i), \quad (93)$$

gdzie funkcje $\psi_i(x_i)$ są w otoczeniu zera nieskończenie małymi rzędu co najmniej drugiego.

Operator f , który da się teraz rozłożyć na sumę: $f = I + \psi$, charakteryzować będziemy, jak zwykle, dwoma wielkościami $p(r)$ i $q(r)$

$$p(r) = \sup_{\sum x_i^2 \leq r^2} \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}} \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i + \psi_i(x_i)|^2},$$

$$q(r) = \sup_{\sum x_i^2 \leq r^2} \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}} \sqrt{\sum_{i=1}^n |\psi_i(x_i)|^2}. \quad (94)$$

Dla oszacowania obszarów stabilności określimy własności operatora liniowego K . Widmo operatora K jest zbiorem tych wartości λ , dla których $W_s(\lambda) = \det [\lambda I - K(s)]$ ma zera w prawej półpłaszczyźnie:

$$W_s(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \dots & -K_n(s) \\ -K_1(s) & \lambda & \dots & 0 \\ 0 & -K_2(s) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^n - K_1(s) K_2(s) \dots K_n(s).$$

Stąd: $Sp(K) = \{\lambda : \lambda = \sqrt[n]{K_1(s) \dots K_n(s)} \text{ dla } \operatorname{Re} s \geq 0\}$.

Norma operatora K może być obliczona z zależności $\|K\| = \sup_{\lambda \in Sp(K^*K)} \sqrt[n]{\lambda}$. Obliczamy wobec tego K^*K

$$K^*(s) K(s) = \begin{pmatrix} |K_1(s)|^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |K_2(s)|^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & |K_n(s)|^2 \end{pmatrix}.$$

Maksymalna wartość λ , dla której wielomian $W_i^*(\lambda) = \det[\lambda I - K^*(s)K(s)] = \prod_{i=1}^n [\lambda - |K_i(s)|^2]$ ma zera w półpłaszczyźnie $\operatorname{Re} s \geq 0$ jest równa $\max_i \|K_i\|^2$, gdzie norma brana jest w przestrzeni H . Wobec tego

$$\|K\| = \max_i \|K_i\|_H = \max_i \sup_{\operatorname{Re} s \geq 0} |K_i(s)|. \quad (95)$$

Pozostaje jeszcze do obliczenia $\|(\lambda I - K)^{-1}K\|$. Ze względu na duże trudności rachunkowe ograniczymy się jedynie do oszacowania tej wielkości. Operator $(\lambda I - K)^{-1}$ da się przedstawić w postaci iloczynu $(\lambda I - K)^{-1} = AD$, gdzie D jest macierzą względnych dopełnień algebraicznych elementów macierzy $(\lambda I - K)$, natomiast A jest macierzą diagonalną

$$A = \begin{pmatrix} A_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & A_0 \end{pmatrix} \quad \text{gdzie } A_0(s) = \frac{1}{\det(\lambda I - K(s))}.$$

$$\begin{aligned} \text{Jak wynika z prostego obliczenia } \|A\| &= \sup_{\operatorname{Re} s \geq 0} \frac{1}{\det(\lambda I - K(s))} = \\ &= \frac{1}{\inf_{\operatorname{Re} s \geq 0} |\lambda^n - K_1(s) \cdots K_n(s)|}. \end{aligned}$$

Macierz dopełnień algebraicznych ma postać:

$$D = \begin{vmatrix} \lambda^{n-1} & \prod_{n-1} K_\nu & \lambda \prod_{n-2} K_\nu & \lambda^2 \prod_{n-3} K_\nu & \cdots & \lambda^{n-2} K_\nu \\ \lambda^{n-2} K_\nu & \lambda^{n-1} & \prod_{n-1} K_\nu & \lambda \prod_{n-2} K_\nu & \cdots & \lambda^{n-3} \prod_2 K_\nu \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \prod_{n-1} K_\nu & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \lambda^{n-1} \end{vmatrix}$$

gdzie $\prod_p K_\nu$ oznacza iloczyn p różnych operatorów K_ν (nie precyzujemy dokładnie które wskaźniki ν występują w poszczególnych iloczynach). Z postaci macierzy D łatwo wyprowadzić oszacowanie

$$\|Dx\| \leq \left[\sum_i^n (|\lambda|^{n-1} + |\lambda|^{n-2} \|K\| + \cdots \|K\|^{n-1})^2 \|x_i\|^2 \right]^{1/2} = \frac{|\lambda|^{n-1} \|K\|^{n-1}}{|\lambda| - \|K\|} \|x\|.$$

Stąd ostatecznie

$$\|(\lambda I - K)^{-1}K\| \leq \|K\| \frac{|\lambda|^{n-1} \|K\|^{n-1}}{|\lambda| - \|K\|} \frac{1}{\inf_{\operatorname{Re} s \geq 0} |\lambda^n - K_1(s) \cdots K_n(s)|}. \quad (96)$$

Zgodnie z (72) i (73), obszar stabilności wyznaczony jest przez nierówności

$$\|K\| p(\tau) < |\lambda|,$$

$$\|K\| \frac{|\lambda|^n - \|K\|^n}{|\lambda| - \|K\|} q(r) < \inf_{\operatorname{Re} s \geq 0} |\lambda^n - K_1(s) \cdots K_n(s)|. \quad (97)$$

W szczególności dla charakterystyk nieliniowych, takich że $p(r)=1$, układ jest stabilny dla dowolnych amplitud, jeżeli

$$|\lambda| > \|K\| = \max_i \sup_{\operatorname{Re} s \geq 0} |K_i(s)|.$$

Dla dostatecznie małych r układ jest stabilny wtedy, gdy λ nie należy do $Sp(K)$, czyli $\inf_{\operatorname{Re} s \geq 0} |\lambda^n - K_1(s) \cdots K_n(s)| > 0$.

Pozostaje do rozpatrzenia jeszcze przypadek b), gdy co najmniej jedna z funkcji $f_i(x_i)$ ma w punkcie $x_i=0$ znikającą pochodną. Operator nieliniowy f można wówczas przedstawić w postaci $f=aI+\psi$, gdzie a jest macierzą diagonalną mającą na przekątnej głównej jedynki i co najmniej jedno zero. Ilość tych zer oznaczmy przez m ($m \leq n$). Macierz operatorów Ka różni się wówczas od K tylko tym, że na miejscu niektórych K_i we wzorze (92) występują zera.

Widmo operatora Ka składa się z jejnego punktu $\lambda=0$, natomiast $\|Ka\|=\|K\|$. Przeprowadzając rozważania analogiczne do tych, które poprzedzają wzór (96), otrzymamy:

$$\|(\lambda I - Ka)^{-1} K\| \leq \|K\| (|\lambda|^{n-1} + |\lambda|^{n-2} \|K\| + \dots + \lambda^{m-1} \|K\|^{n-m}) \cdot \frac{1}{|\lambda|^m}$$

i stąd — zgodnie z (80) — obszar stabilności oszacowany będzie przez nierówność:

$$\left(\frac{\|K\|}{|\lambda|} + \frac{\|K\|^2}{|\lambda|^2} + \dots + \frac{\|K\|^{n-m-1}}{|\lambda|^{n-m+1}} \right) q(r) < 1. \quad (98)$$

ОБ ОДНОМ ИЗ МЕТОДОВ ИССЛЕДОВАНИЯ СТАБИЛЬНОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Электрические системы содержащие линейные и нелинейные элементы и не являющиеся явной функцией времени могут определяться уравнением или системой интегральных уравнений типа Вольтерры с разностными ядрами.

В работе исследуются свойства решений таких уравнений в классе квази-периодических функций (образующих пространство Гильберта), в котором введена норма равная эффективному значению функции (вычисляемому в пределе времени $(0, T$ при $T \rightarrow \infty)$). Электрическая система, работающая в замкнутой цепи обратной связи названа энергетически стабильной, если при возбуждении внешним процессом мощностью равной нулю, дает ответный сигнал также замирающей мощности. Используя основные понятия функционального анализа (нормы и спектра оператора) в Гильбертовом пространстве определены условия гарантирующие стабильность системы в определенном выше смысле. Даны также методы определения спектра и вычисления норм линейных операторов, при помощи которых определяется диапазон стабильности.

Представленный метод позволяет на дискуссию стабильности в зависимости от определенного выделенного параметра характеризующего усиление усилителя находящегося в цепи обратной связи.

В заключении приведено несколько примеров иллюстрирующих обсуждаемый метод.

ON A METHOD FOR EXAMINING STABILITY OF ELECTRIC NONLINEAR NETWORKS

The electric networks comprising both the linear and nonlinear explicitly independent of time elements may be described by single or a set of nonlinear integral equations of Volterra type with the difference kernel. Exploration of properties combined in the solutions of these equations is the object of presented paper. The examination is actually confined to the solutions pertaining to the class of functions quasi-periodic (mapping Hilbert space) with the introduced norm equal to the effective value of signal (counted within period $(0, T)$ by $T \rightarrow \infty$). The electric network operating in a closed feedback loop is understood to be energetically stable, if being generated by the external signal with power equal to zero, gives a response of dying down power. Applying the fundamental concepts of functional analysis in Hilbert space (norms and operator spectrum) the conditions providing the stability of network in the sense as defined above have been determined.

Methods determining the spectra; evaluating the norms of the linear operators which permit to estimate the stability range are then given. Method as suggested enables to examine the stability conditions dependent on a certain presellected parameter, which characterizes the amplification of the amplifier inserted in the feedback loop. Finally several examples illustrating the method are presented.

538.561:621.396.615.1

L. KNOCH

Warunki równoczesnego wytwarzania dwóch drgań nieharmonicznych

Rękopis dostarczono 6. 5. 1960.

Rozważano generator nieliniowy złożony z dwóch liniowych obwodów drgań pobudzanych elementem o ujemnej charakterystyce nieliniowej.

Uzyskano wyrażenia na amplitudy drgań i wykazano wpływ odstrojenia i nierównomierności obciążenia obwodów oraz wpływ charakterystyki elementu pobudzającego na warunki równoczesnego wytwarzania dwóch drgań nieharmonicznych.

Podano wyrażenie na częstotliwość drgań, uwzględniające wpływ obwodów drgań oraz wpływ składowych harmonicznych.

Analizę przeprowadzono za pomocą metody technicznej, podanej przez J. Groszkowskiego, zaś obszar stabilności drgań wyznaczono za pomocą określenia obszaru minimum energii potencjalnej układu.

1. WSTĘP

Układ dynamiczny o n stopniach swobody pobudzany czynnym elementem nieliniowym może w pewnych warunkach wytwarzać n drgań stabilnych o częstotliwościach określonych parametrami układu [20]. W zależności od wartości parametrów układu, częstotliwości drgań mogą być względem siebie harmoniczne i wówczas drgania nazywamy synchronicznymi, lub nieharmoniczne. W drugim przypadku drgania nazywamy asynchronicznymi tylko wtedy, jeżeli między drganiami nie występuje zjawisko wzajemnej synchronizacji [18].

Wytwarzanie równoczesne większej liczby stabilnych drgań asynchronicznych jest trudne zarówno do zrealizowania w praktyce jak do rygorystycznego ujęcia analitycznego.

Niektórzy autorzy [20] dla uproszczenia analizy zakładają całkowitą symetrię obwodów drgających, która prowadzi do rozwiązania w postaci równych amplitud drgań równoczesnych. Jednakże takie potraktowanie zagadnienia nie wyjaśnia dostatecznie obrazu fizycznego, w którym rzeczywiste obwody praktycznie realizowane nie są ściśle symetryczne.

Z tych względów bardziej celowe wydaje się rozpatrzenie układu ograniczonego do dwóch stopni swobody o dowolnych parametrach.

Zagadnienie równoczesnego wytwarzania drgań stabilnych w układzie

generatora z obwodem o dwóch stopniach swobody pobudzany jednym elementem czynnym było po raz pierwszy rozpatrywane przez v. d. Pola w 1922 r. [15].

W swojej pracy v. d. Pol rozpatrywał zjawisko „przeciągania” w generatorze triodowym z dwoma obwodami sprzężonymi (rys. 4 [15]). Charakterystykę nieliniową elementu pobudzającego przyjął w postaci szeregu potęgowego trzeciego stopnia w postaci

$$i = -\alpha u + \beta u^2 + \gamma u^3 \dots \quad (1)$$

Wyjaśnił on jednoznacznie na drodze analitycznej i doświadczalnej, że dwa stabilne drgania nie mogą być wytwarzane jednocześnie w układzie generatora o dwóch stopniach swobody, w którym charakterystykę elementu pobudzającego da się aproksymować za pomocą szeregu potęgowego ograniczonego do trzeciego stopnia (1). Nie wyjaśnił jednak czy w generatorze o dwóch lub więcej stopniach swobody jest możliwe w ogóle wytwarzanie drgań równoczesnych.

Ponieważ wyniki następnych prac teoretycznych i eksperymentalnych [14] [10] [17] [1] [19] potwierdziły wnioski z analizy v. d. Pola, nie zwracano uwagi na założenia, które były wyjściem do jego rozważań i powszechnie utrzymywano, że w generatorze podobnego typu nie jest możliwe uzyskanie dwóch jednoczesnych drgań stabilnych.

Dopiero Skinner w swojej pracy [16] (nie ogłoszona) [5] wykazał, że jest możliwe wzbudzenie dwóch niezależnych, równoczesnych drgań w generatorze z opornością ujemną, którego charakterystyka prądowo-napięciowa ma specjalny kształt. Według Skinnera charakterystyka $i=f(u)$ przedstawiona w postaci szeregu potęgowego musi zawierać co najmniej wyraz piątego stopnia

$$i=f(u)=a_1u+a_2u^2+a_3u^3+a_4u^4+a_5u^5, \quad (2)$$

przy czym a_3 i a_5 muszą być różnych znaków, tj. $a_3 < 0$ oraz $a_5 > 0$, gdy $a_1 < 0$. Rozważania teoretyczne zostały potwierdzone doświadczalnie w układzie generatora tranzytronowego (rys. 18,3 [5]).

W ostatnich latach szereg autorów zajmowało się zagadnieniem jednoczesnej generacji dwu lub więcej drgań w układach o kilku stopniach swobody.

Schaffner [18], stosując metodę linearyzacji Kryłowa i Bogolubowa, podał ogólne rozwiązanie dla równoczesnych drgań synchronicznych, zarówno dla stanu ustalonego jak przejściowego, w układzie jak na rys. 1 [18]. Określił on również obszar stabilnych rozwiązań metodą podobną do zastosowanej przez v. d. Pola. W rozważaniach przyjmował charakterystykę elementu pobudzającego w postaci podanej przez Skinnera. Rozważania dotyczyły amplitud drgań stabilnych, o dwóch częstotliwościach

harmonicznych lub nieharmonicznych. Nie określił zawartości składowych harmonicznych jak również nie podał wyrażeń na częstotliwości drgań podstawowych i nie rozważał wpływu częstotliwości składowych harmonicznych na częstotliwość roboczą.

Dishman i Edson w swojej pracy [4] rozpatrują przypadek generatora drgań asynchronicznych z dwoma stopniami swobody pracującego w klasie C, w układzie sprzężenia zwrotnego poprzez lampę odwracającą fazę (rys. 10 [4]). Analiza oparta na metodzie linearyzacji Kryłowa i Bogolubowa jest analogiczna do przeprowadzonej przez Schaffnera [18]. Stabilność drgań autorzy uzasadniają za pomocą pojęcia „ujemnej dyskryminacji” czwórnika nieliniowego.

Feist [6] w układzie (rys. 6 [6]) podobnym do układu [4] uzyskał dwa równoczesne drgania stabilne. W pracy swej ograniczył się do zbadania wpływu czynników zewnętrznych na stałość częstotliwości różnicowej.

Magazanik [11, 12, 13], zajmuje się badaniem jakościowym pewnych zależności i własności drgań asynchronicznych w rzeczywistych generatorach samodrgających z dwoma stopniami swobody przy małym tłumieniu częstotliwości własnych obwodów drgających. Autor rozpatruje jakościowy wpływ nieliniowości elementu pobudzającego i obciążenia na stabilność drgań pojedynczych i dwóch drgań jednoczesnych, badając przebieg izoklin na płaszczyźnie fazowej. Magazanik nie zajmował się ustaleniem częstotliwości roboczych ani też widmem drgań harmonicznych i jego wpływem na częstotliwości podstawowe.

Utkin w swoich pracach [20] [21] [22] [23] zajmuje się przede wszystkim generatorami sprzężonymi pracującymi na częstotliwościach wielokrotnych (drgania synchroniczne). Praca [20] poświęcona jest również zagadnieniu stabilności drgań asynchronicznych w układach o wielu stopniach swobody. Rozpatrywany był przypadek uogólnionego warunku stabilności dla układów symetrycznych, tj. takich, których równość parametrów pozwala założyć równość amplitud wszystkich drgań.

Utkin, podobnie jak inni, prace swoje ograniczył do określenia amplitudy drgań i ich stabilności.

Rozważania innych autorów [24] [25] [26] dotyczą synchronizacji i wytwarzania równoczesnych drgań harmonicznych z dwoma stopniami swobody.

Praca niniejsza ma na celu wyjaśnienie pewnych zjawisk i zależności w układzie z dwoma stopniami swobody, których rozpatrzenie było pominięte w pracach dotychczasowych. Nie usiłowano ująć zagadnienia w ramy ścisłej analizy matematycznej. Zastosowana jednak metoda, różna od stosowanych przez innych autorów, pozwoliła na większą łatwość dyskusji wpływu różnych czynników na warunki wytwarzania drgań równoczesnych.

Analiza zagadnienia została oparta na metodzie podanej przez Groszkowskiego [7] [8], tzw. metodzie technicznej, polegającej na założeniu a priori w układzie drgającym istnienia prądów i napięć w postaci widm złożonych ze składowych podstawowych oraz harmoniczných, powstałych na skutek pracy w obszarze nieliniowym charakterystyki elementu pobudzającego i wyznaczeniu amplitud poszczególnych składowych przez porównanie odpowiednich współczynników w równaniach wynikających z warunku generacji drgań. Przyjęto symetryczną charakterystykę elementu pobudzającego wyrażoną za pomocą szeregu potęgowego 5. stopnia, w którym współczynniki przy wyrazach 3. i 5. stopnia są różnych znaków. Uzasadnieniem przyjęcia charakterystyki takiego kształtu była uwaga w pracy v. d. Pola [15], wskazująca na możliwość wytworzenia drgań równoczesnych przy zastosowaniu charakterystyki elementu pobudzającego określonej wyrazami szeregu stopnia wyższego niż trzeci oraz wnioski z pracy Skinnera [16]. Wyrazy parzyste pominięto ze względu na to, że w pierwszym przybliżeniu nie wpływają na amplitudę i stabilność drgań.

W wyniku przeprowadzonej analizy uzyskano rozwiązanie na amplitudy drgań równoczesnych w zależności od rozstrojenia i parametrów obwodów oraz wyznaczono obszar rozwiązań stabilnych. Następnie uzyskano dokładniejsze wyrażenie na częstotliwość drgań uwzględniające wpływ obwodów oraz wpływ częstotliwości składowych harmoniczných. Wyznaczono składowe harmoniczne obu drgań.

Wyjaśniono zależność stosunku amplitud obu drgań równoczesnych od nierównomierności obciążenia obwodów i określono ilościowy wpływ nierównomierności na stabilność drgań równoczesnych.

Wykazano, że dla wytwarzania drgań równoczesnych warunki doboru obciążenia są krytyczne, a dopuszczalny zakres nierównomierności obciążenia jest ograniczony.

Wyjaśniono również zależność warunku wytwarzania równoczesnych drgań stabilnych od kształtu charakterystyki elementu pobudzającego, wykazując wpływ stosunku współczynników przy wyrazach 3. i 5. stopnia na dopuszczalny zakres nierównomierności obciążenia.

Stwierdzono, że dla pewnych zespołów parametrów obwodów, gdy układ oscyluje na jednej częstotliwości w warunkach „twardego wzbudzenia”, jest możliwe równoczesne samowzbudzenie drgań na częstotliwości drugiej.

Obszar stabilności drgań równoczesnych określono metodą wyznaczenia obszaru istnienia minimum energii potencjalnej układu, uzyskując całkowitą zgodność wyniku z pracami innych autorów, stosujących metodę „zaburzenia stanu równowagi”.

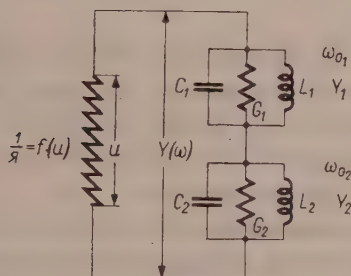
Wyrażenie określające wpływ składowych harmoniczných na często-

liwość składowej podstawowej, porównane z wyrażeniem otrzymanym za pomocą metody równowagi energii urojonej harmonicznych, wykazało całkowitą zgodność obu wyrażeń. Uzyskane wyniki podkreślają poprawność i skuteczność przyjętej do analizy metody technicznej. Amplitudy drgań podstawowych zostały wyznaczone z dokładnością nie mniejszą niż za pomocą innych metod (v. d. Pola, Kryłowa-Bogolubowa). Poza tym przez zastosowanie metody technicznej otrzymano bezpośrednio dokładniejsze wyrażenie na częstotliwość drgań i widmo harmonicznych, czego nie dają inne metody.

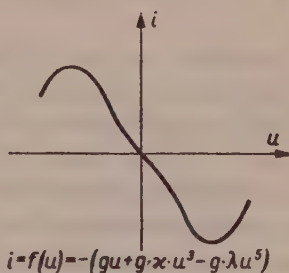
2. STAN USTALONY PRZEBIEGÓW PERIODYCZNYCH WYTWARZANYCH W GENERATORZE O DWÓCH STOPNIACH SWOBODY

2.1. Zależności wynikające z charakterystyki elementu pobudzającego o nieliniowej oporności ujemnej

Rozpatrzono układ generatora złożonego z elementu pobudzającego o oporze ujemnym uzależnionym napięciowo (typu dynatronowego), do którego przyłączono dwa równoległe obwody rezonansowe, połączone



Rys. 1. Model układu elektrycznego.



Rys. 2. Charakterystyka elementu pobudzającego.

szeregowo; przy czym przyjmuje się, że między obwodami nie ma sprzężenia indukcyjnego (rys. 1). Zakładamy, że nieliniową charakterystykę oporu ujemnego da się wyrazić za pomocą zależności

$$i = f(u) = -(gu + g \cdot \kappa \cdot u^3 - g \cdot \lambda \cdot u^5), \quad (3)$$

gdzie

g — jest nachyleniem charakterystyki w początku układu współrzędnych o wymiarze przewodności,

λ, κ — współczynniki,

u — napięcie na końcówkach oporu ujemnego.

Przebieg charakterystyki opisanej wyrażeniem (3) podaje rys. 2. W stanie ustalonym drgań układ będzie generował prąd i oraz napięcie

u , które ze względu na nieliniowy przebieg charakterystyki możemy wyrazić zupełnie ogólnie w postaci

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} [\bar{U}_{1k} \sin(k\omega_1 t + \alpha_{1k}) + U_{2k} \sin(k\omega_2 t + \alpha_{2k})]. \quad (4)$$

$$i = \sum_{k=1}^{\infty} [\bar{I}_{1k} \sin(k\omega_1 t + \beta_{1k}) + \bar{I}_{2k} \sin(k\omega_2 t + \beta_{2k})], \quad (5)$$

gdzie

u — napięcie panujące na końcówkach oporu nieliniowego ujemnego,

i — prąd płynący w oporze nieliniowym,

$\bar{U}_{1k}, \bar{I}_{1k}$ — amplitudy napięć i prądów o częstotliwości $k\omega_1$

α_{1k}, β_{1k} — fazy napięć i prądów o częstotliwości $k\omega_1$

ω_1 — częstotliwość podstawowa drgań obwodu 1

k — liczba całkowita

$\bar{U}_{2k}, \bar{I}_{2k}$ } jak wyżej, odpowiednio
 α_{2k}, β_{2k} } dla drgań obwodu 2.
 ω_2

Przyjmujemy, że częstotliwości ω_1 i ω_2 są nieharmoniczne, a równoczesne drgania układu są asynchroniczne. Oznacza to, że jeżeli zależność między częstotliwościami obu drgań da się ustalić za pomocą równości $r \cdot \omega_1 = p \cdot \omega_2$ stosunek liczb r i p będzie liczbą niewymierną. Dodatkowym założeniem jest, że liczba ta jest bliska jedności.

Przy pracy generatora w obszarze niewielkiej nieliniowości (odpowiadającej pracy generatora z charakterystyką wypukłą 3. stopnia w pobliżu granicy powstania drgań) i przy dostatecznej dobroci obwodów ($Q^2 \gg 1$) zawartość harmoniczných jest niewielka. Przy obliczaniu amplitudy składowych podstawowych możemy więc pominąć wszystkie wyższe harmoniczne, które nie mają zasadniczego wpływu na amplitudy tych drgań.

W przypadku charakterystyki elementu pobudzającego 3. stopnia przez odpowiedni wybór oporności obciążenia można dowolnie ograniczyć zawartość harmoniczných w wytwarzanych drganiach, a na granicy powstawania drgań pracować bez harmoniczných. W przypadku charakterystyki 5. stopnia, której współczynniki przy 3. i 5. stopniu są przeciwnych znaków, wytwarzanie drgań odbywa się zawsze z udziałem trzeciej i piątej harmoniczných, również na granicy wytwarzania drgań. Zgodnie z teorią harmoniczných zawartość harmoniczných wpływa istotnie na częstotliwość drgań układu dynamicznego określoną parametrami obwodu oscylacyjnego. Dla wyjaśnienia tego wpływu w dal-

szych rozważaniach zachowamy trzecią i piątą harmoniczną napięć i prądów, ponieważ wyrazy tylko trzeciego i piątego stopnia charakterystyki mają zasadnicze znaczenie w procesie równoczesnego wytwarzania dwóch stabilnych drgań asynchronicznych.

Wyrażenia (4)(5) napiszemy odpowiednio w postaci

$$u = \bar{U}_{11} \sin(\omega_1 t + \alpha_{11}) + \bar{U}_{13} \sin(3\omega_1 t + \alpha_{13}) + \bar{U}_{15} \sin(5\omega_1 t + \alpha_{15}) + \bar{U}_{21} \sin(\omega_2 t + \alpha_{21}) + \bar{U}_{23} \sin(3\omega_2 t + \alpha_{23}) + \bar{U}_{25} \sin(5\omega_2 t + \alpha_{25}), \quad (6)$$

$$i = \bar{I}_{11} \sin(\omega_1 t + \beta_{11}) + \bar{I}_{13} \sin(3\omega_1 t + \beta_{13}) + \bar{I}_{15} \sin(5\omega_1 t + \beta_{15}) + \bar{I}_{21} \sin(\omega_2 t + \beta_{21}) + \bar{I}_{23} \sin(3\omega_2 t + \beta_{23}) + \bar{I}_{25} \sin(5\omega_2 t + \beta_{25}). \quad (7)$$

Amplitudy napięć składowych normujemy względem amplitudy \bar{U}_{11} drgań o częstotliwości ω_1 i wprowadzamy oznaczenia

$$\frac{\bar{U}_{21}}{\bar{U}_{11}} = q; \quad \frac{\bar{U}_{13}}{\bar{U}_{11}} = m_{13}; \quad \frac{\bar{U}_{15}}{\bar{U}_{11}} = m_{15}; \quad \frac{\bar{U}_{23}}{\bar{U}_{21}} = m_{23}; \quad \frac{\bar{U}_{25}}{\bar{U}_{21}} = m_{25}$$

$$\frac{\bar{U}_{23}}{\bar{U}_{11}} = m_{23} \cdot q; \quad \frac{\bar{U}_{25}}{\bar{U}_{11}} = m_{25} \cdot q.$$

Wyrażenie (6) przyjmie postać

$$u = \bar{U}_{11} [\sin(\omega_1 t + \alpha_{11}) + m_{13} \sin(3\omega_1 t + \alpha_{13}) + m_{15} \sin(5\omega_1 t + \alpha_{15}) + q \sin(\omega_2 t + \alpha_{21}) + m_{23} q \sin(3\omega_2 t + \alpha_{23}) + m_{25} q \sin(5\omega_2 t + \alpha_{25})]. \quad (8)$$

Wyrażenia (6) i (8) na prąd i napięcie w postaci szeregów ograniczonych do wyrazów 5. harmonicznego włącznie i z pominięciem harmonicznych parzystych, podstawiamy do wyrażenia (3) i wykonujemy działania. W wyniku otrzymamy szereg składników o współczynnikach różnych rzędów wielkości, które możemy uszeregować jak następuje:

I rząd: q, q^2, q^4

II rząd: $m q, m q^2, m q^4$

III rząd: $m_{13}^2, m_{15}^2, m_{13} \cdot m_{15}, \dots, q^2 m^2,$

IV rząd: m_{13}^3, \dots

gdzie

q jest rzędu jedności: $q \approx 1$

m jest znacznie mniejsze od jedności: $m \ll 1$, stąd: $m^2 \ll m$.

Wobec tego składniki, których amplituda jest rzędu trzeciego i wyższych można pominąć, gdyż nie wpłyną one na wynik w sposób zasad-

niczy. Porównując współczynniki odpowiadające tym samym częstotliwościom i fazom otrzymamy wyrażenia na amplitudy napięć i prądów poszczególnych drgań składowych. Rozważymy kolejno poszczególne składniki.

Składowe o częstotliwościach podstawowych ω_1 i ω_2 wyznaczono przyrównując współczynniki przy $\cos \omega_1 t$ i $\sin \omega_1 t$ prawej i lewej strony równ. (3). Podstawiając (7) i (8), otrzymujemy następujące wyrażenia dla składowej o częstotliwości ω_1 po wprowadzeniu oznaczeń:

$$\mu = \frac{3}{4} \kappa \bar{U}_{11}^2, \quad \varepsilon = \frac{5}{9} \frac{\lambda}{\kappa^2} \text{ oraz przyjmując, że } a_{11} = 0$$

$$\bar{I}_{11} \cdot \cos \beta_{11} = -g \bar{U}_{11} [1 + \mu(1 + 2q^2) - 2\mu^2 \varepsilon (1 + 6q^2 + 3q^4)], \quad (9)$$

$$\bar{I}_{11} \cdot \sin \beta_{11} = +g \bar{U}_{11} \cdot \mu \{m_{13} [1 - \mu \cdot \varepsilon \cdot 3(1 + 4q^2)] + m_{15} \cdot \mu \cdot \varepsilon\}. \quad (10)$$

W analogiczny sposób otrzymamy odpowiednie wyrażenia dla amplitud prądów i napięć drgań o częstotliwości ω_2 .

Kąt fazowy a_{21} między napięciami obu drgań jest zupełnie przypadkowy i uzależniony od przyjętego momentu rozpoczęcia obserwacji. Wobec tego, że z założenia oba drgania są asynchroniczne, wartość kąta a_{21} nie ma wpływu ani na częstotliwość ani na amplitudę drgań. W dalszych rozważaniach możemy przyjąć, że $a_{21} = 0$.

Przyrównując, jak wyżej, współczynniki przy $\cos \omega_2 t$ i $\sin \omega_2 t$ z prawej i lewej strony otrzymamy zależności

$$\bar{I}_{21} \cdot \cos \beta_{21} = -g \bar{U}_{21} [1 + \mu(2 + q^2) - 2\mu^2 \varepsilon (q^4 + 6q^2 + 3)], \quad (11)$$

$$\bar{I}_{21} \cdot \sin \beta_{21} = +g \bar{U}_{21} \cdot q^2 \cdot \mu \{m_{23} [1 - 3(q^2 + 4) \mu \cdot \varepsilon] + m_{25} \cdot q^2 \cdot \mu \cdot \varepsilon\}. \quad (12)$$

Dzieląc stronami (9) i (10) przez \bar{U}_{11} oraz (11) i (12) przez \bar{U}_{21} określimy część rzeczywistą i urojoną zespolonej przewodności ujemnej elementu pobudzającego dla częstotliwości podstawowych ω_1 i ω_2 w postaci:

$$\hat{Y}_{11} = G_{11} + jB_{11}, \quad (13)$$

$$\hat{Y}_{21} = G_{21} + jB_{21}, \quad (14)$$

gdzie

$$G_{11} = |Y_{11}| \cdot \cos \beta_{11} = \frac{\bar{I}_{11}}{\bar{U}_{11}} \cos \beta_{11} = -g [1 + \mu(1 + 2q^2) - 2\mu^2 \varepsilon (1 + 6q^2 + 3q^4)], \quad (15)$$

$$B_{11} = |Y_{11}| \cdot \sin \beta_{11} = \frac{\bar{I}_{11}}{\bar{U}_{11}} \cdot \sin \beta_{11} = g\mu \{m_{13} [1 - \mu \varepsilon \cdot 3(1 + 4q^2)] + m_{15} \cdot \mu \cdot \varepsilon\} \quad (16)$$

oraz

$$G_{21} = |Y_{21}| \cos \beta_{21} = \frac{\bar{I}_{21}}{\bar{U}_{21}} \cdot \cos \beta_{21} = g [1 + \mu (2 + q^2) - 2\mu^2 \varepsilon (q^4 + 6q^2 + 3)] \quad (17)$$

$$B_{21} = |Y_{21}| \sin \beta_{21} = \frac{\bar{I}_{21}}{\bar{U}_{21}} \cdot \sin \beta_{21} = g \cdot \mu \cdot q^2 \{ m_{23} [\mu - 3(q^2 + 4)\mu \cdot \varepsilon] + \\ + m_{25} \cdot \mu \cdot \varepsilon \cdot q^2 \}. \quad (18)$$

Amplitudy prądów o częstotliwościach podstawowych ω_1 i ω_2 można określić z zależności

$$\bar{I}_{11} = \sqrt{(\bar{I}_{11} \cos \beta_{11})^2 + (\bar{I}_{11} \sin \beta_{11})^2}$$

oraz

$$\bar{I}_{21} = \sqrt{(\bar{I}_{21} \cos \beta_{21})^2 + (\bar{I}_{21} \sin \beta_{21})^2},$$

co można napisać w postaci

$$\bar{I}_{11} = |\bar{I}_{11} \cos \beta_{11}| \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta_{11}},$$

$$\bar{I}_{21} = |\bar{I}_{21} \cos \beta_{21}| \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta_{21}}$$

Z porównania wyrażeń (15) i (16) oraz (17) i (18) wynika, że

$$\operatorname{tg} \beta_{11} \ll 1 \text{ oraz } \operatorname{tg} \beta_{21} \ll 1$$

i wobec tego możemy przyjąć

$$\bar{I}_{11} \approx g \bar{U}_{11} [1 + \mu (1 + 2q^2) - 2\mu^2 \varepsilon (1 + 6q^2 + 3q^4)], \quad (19)$$

$$\bar{I}_{21} \approx g \bar{U}_{21} [1 + \mu (2 + q^2) - 2\mu^2 \varepsilon (q^4 + 6q^2 + 3)]. \quad (20)$$

Z zależności (19) i (20) otrzymujemy stosunek prądów obu drgań

$$\frac{\bar{I}_{21}}{\bar{I}_{11}} = q \frac{1 + \mu (2 + q^2) - 2\mu^2 \varepsilon (3 + 6q^2 + q^4)}{1 + \mu (2q^2 + 1) - 2\mu^2 \varepsilon (3q^4 + 6q^2 + 1)} \quad (21)$$

2.2. Zależności wynikające z admitancji wypadkowej dwóch obwodów rezonansowych równoległych połączonych szeregowo

Element pobudzający o charakterystyce wyrażonej zależnością (3) jest przyłączony do obwodu złożonego z dwóch obwodów rezonansowych równoległych połączonych szeregowo jak na rys. 1.

Oznaczamy przez $L_1 C_1 G_1$ parametry obwodu 1. i odpowiednio przez $L_2 C_2 G_2$ parametry obwodu 2. Przewodność obwodu 1. dla częstotliwości

$k\omega$ (gdzie $k=1,2,\dots$) wyrazi się przez $Y_{1k} = G_1 + j \left(k\omega C_1 - \frac{1}{k\omega L_1} \right)$, ob-

wodu 2. przez $Y_{2k} = G_2 + j \left(k\omega C_2 - \frac{1}{k\omega L_2} \right)$. Oznaczając częstotliwość rezonansową obwodu 1. przez $\omega_{01}^2 = \frac{1}{L_1 C_1}$, obwodu 2. przez $\omega_{02}^2 = \frac{1}{L_2 C_2}$ oraz wprowadzając oznaczenia:

$$Q_1 = \frac{1}{G_1 \omega_{01} L_1} \approx \frac{1}{G_1 \omega L_1}, \quad Q_2 = \frac{1}{G_2 \omega_{02} L_2} \approx \frac{1}{G_2 \omega L_2} \quad (\text{biorąc pod uwagę, że } \omega \approx \omega_{01} \approx \omega_{02}), \text{ otrzymamy}$$

$$\hat{Y}_{1k} = G_1 \left[1 + j \frac{Q_1}{k} \left(k^2 \frac{\omega^2}{\omega_{01}^2} - 1 \right) \right], \quad (22)$$

$$\hat{Y}_{2k} = G_2 \left[1 + j \frac{Q_2}{k} \left(k^2 \frac{\omega^2}{\omega_{02}^2} - 1 \right) \right]. \quad (23)$$

Admitancja całkowita dla częstotliwości $k\omega$ obwodów 1. i 2. połączonych szeregowo wyniesie

$$\frac{1}{\hat{Y}_{(k\omega)}} = \frac{1}{\hat{Y}_{1k}} + \frac{1}{\hat{Y}_{2k}}. \quad (24)$$

Podstawiając do wyrażenia (24) zależności (22) i (23) oraz oznaczając $a = \frac{G_1}{G_2}$ otrzymamy

$$\frac{1}{\hat{Y}_{(k\omega)}} = \frac{1}{G_1} \left[\frac{1}{1 + j \frac{Q_1}{k} \left(k^2 \frac{\omega^2}{\omega_{01}^2} - 1 \right)} + \frac{a}{1 + j \frac{Q_2}{k} \left(k^2 \frac{\omega^2}{\omega_{02}^2} - 1 \right)} \right]. \quad (25)$$

Admitancję całkowitą $\hat{Y}(\omega_1)$ dla drgań o częstotliwości ω_1 otrzymamy zakładając w równaniu (25) $k=1$ oraz $\omega = \omega_1$

$$\frac{1}{\hat{Y}_{(\omega_1)}} = \frac{1}{G_1} \left[\frac{1}{1 + j Q_1 \left(\frac{\omega_1^2}{\omega_{01}^2} - 1 \right)} + \frac{a}{1 + j Q_2 \left(\frac{\omega_1^2}{\omega_{02}^2} - 1 \right)} \right]. \quad (26)$$

Wprowadzimy oznaczenia:

$$Q_1 \left(\frac{\omega_1^2}{\omega_{01}^2} - 1 \right) = \Delta_{11}; \quad Q_2 \left(\frac{\omega_1^2}{\omega_{02}^2} - 1 \right) = \Delta_{12} \quad (27)$$

Δ_{11} — jest miarą odstrojenia częstotliwości ω_1 względem częstotliwości rezonansowej ω_{01} ;

Δ_{12} — odpowiednio względem częstotliwości rezonansowej ω_{02} .

Wprowadzając oznaczenia (27) do wyrażenia (26) i wykonując działania, rozdzielać część rzeczywistą i urojoną otrzymamy

$$\hat{Y}(\omega_1) = G(\omega_1) + jB(\omega_1), \quad (28)$$

gdzie

$$G(\omega_1) = G_1 \frac{(1+a) + (a\Delta_{11}^2 + \Delta_{12}^2)}{(1+a)^2 + (a\Delta_{11} + \Delta_{12})^2}, \quad (29)$$

$$B(\omega_1) = G_1 \frac{\Delta_{11}(1 + \Delta_{12}^2) + a\Delta_{12}(1 + \Delta_{11}^2)}{(1+a)^2 + (a\Delta_{11} + \Delta_{12})^2}. \quad (30)$$

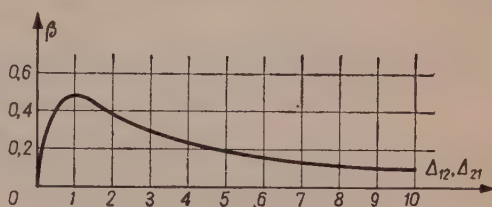
Wyrażenie (30) pozwala na wyznaczenie odstrojenia Δ_{11} częstotliwości ω_1 w zależności od rodzaju pracy generatora określonego wielkością $B(\omega_1)$ oraz od rozstrojenia obwodów Δ_{12} . Znajomość Δ_{11} umożliwi w dalszej części rozważań określenie częstotliwości drgań ω_1 .

Przy wyznaczaniu Δ_{11} z równania (30) wykorzystujemy pewne zależności występujące w układzie, które upraszczają rachunek, zgodnie z założeniem zrobionym na wstępie przyjmujemy, że drgania są wytwarzane z małą zawartością harmoniczych, tj. $\frac{B(\omega_1)}{G} \approx 0$; poza tym przyjmujemy, że obwody są wyraźnie odstrojone tj. zachodzi przypadek, że np.

$$\Delta_{12}^2 > 10. \quad (\text{Np.: } Q_2^2 = 10^3; \quad \left(\frac{\omega_1}{\omega_{02}}\right)^2 - 1 = 5 \cdot 10^{-2}; \quad \Delta_{12}^2 = Q_2^2 \left[\left(\frac{\omega_1}{\omega_{02}}\right)^2 - 1 \right]^2 = 10).$$

Drugi warunek jest istotny dla uzyskania wykresu admitancji obwodu obciążenia (złożonego z szeregowo połączonych dwóch obwodów antyrezonansowych) w kształcie krzywej I na rys. 4. W układzie, w którym drugi warunek jest spełniony otrzymamy dwie częstotliwości rezonansu równoległego ω_1 i ω_2 oraz jedną rezonansu szeregowego ω_3 . Warunek ten oznacza, że obwody drgań muszą być nie tylko dostatecznie rozstrojone jeśli chodzi o częstotliwości rezonansowe ω_{01} i ω_{02} , lecz również odpowiednio selektywne, co zabezpiecza dobroć obwodu Q_1 występującą jako czynnik w wyrażeniu Δ_{12} (lub odpowiednio Q_2 w wyrażeniu Δ_{21}).

Jako wniosek z warunku istnienia krzywej z pętlą przecinającą w trzech punktach oś rzeczywistą G wynika, że $|\Delta_{11}| \ll |\Delta_{12}|$ oraz $|\Delta_{22}| \ll |\Delta_{21}|$ (patrz (39)) oraz, że można przyjąć



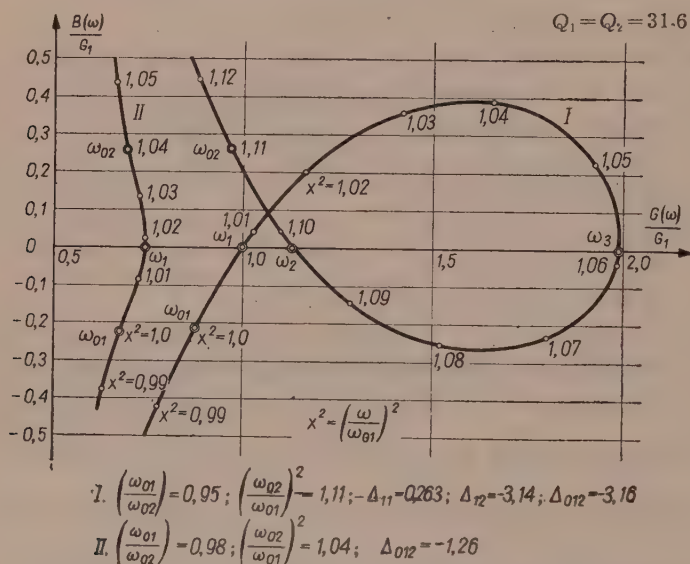
Rys. 3. Wykres współczynnika β w zależności od względnego rozstrojenia obwodów Δ_{12} , Δ_{21} .

$$|\Delta_{12}| \approx |\Delta_{21}| \approx |\Delta_{012}| = Q_{\text{sr}} \left| \left(\frac{\omega_{02}}{\omega_{01}} \right)^2 - 1 \right|, \quad (31)$$

gdzie

Q_{sr} — jest wartością średnią na ogół mało różniących się dobroci Q_1 i Q_2 obu obwodów.

Jeżeli rozstrojenie obwodów będzie mniejsze od pewnej wartości uzależnionej od parametrów obwodów, krzywa I przekształca się w krzywą II i otrzymujemy jedną częstotliwość rezonansową, co warun-



Rys. 4. Wykres admitancji wypadkowej dwóch obwodów rezonansowych równoległych połączonych szeregowo.

kuje możliwość wytworzenia drgań tylko o jednej częstotliwości. Przedział rozstrojenia obwodów, przy którym można uzyskać dwie częstotliwości rezonansu równoległego można wyznaczyć z przedziału rozwiązań rzeczywistych na Δ_{11} i Δ_{22} .

Biorąc pod uwagę (31) możemy przyjąć, że $|\beta_1| = |\beta_2| = |\beta| = \frac{\Delta_{012}}{1 + \Delta_{012}^2}$.

Stąd dolną granicę rozstrojenia obwodów określamy z warunku: $2|\beta| < \min\left(\frac{1}{a}, a\right)$. (32)

Uwzględniając wyżej podane założenia w równaniu (30) otrzymujemy rozwiązanie przybliżone Δ_{11}^I . Następnie podstawiając Δ_{11}^I do mianownika

wyrażenia (30) i przyjmując $\frac{B(\omega_1)}{G} \neq 0$ otrzymujemy rozwiązanie na Δ_{11} w postaci

$$\Delta_{11} = \Delta_{11}^I + \frac{B(\omega_1)}{G_1} [1 + a)^2 + (a\Delta_{11}^I + \Delta_{12}^I)^2] \psi(a\beta_1) \cdot \frac{1}{1 + \Delta_{12}^2}, \quad (33)$$

gdzie

$$\beta_1 = \frac{\Delta_{12}}{1 + \Delta_{12}^2} \approx \frac{\Delta_{012}}{1 + \Delta_{012}^2} = \beta, \\ \Delta_{11}^I = -(a\beta_1) \cdot \psi(a \cdot \beta_1). \quad (34)$$

Przebiegi $\beta = f_1(\Delta_{12})$, $\Delta_{11}^I = f_2(a \cdot \beta)$ oraz $\psi = \psi(a \cdot \beta)$ są podane na rysunkach 3 i 5.

Pierwszy wyraz równania (3) określa wpływ obwodu 2. na częstotliwość ω_1 drgań obwodu 1., drugi — wpływ częstotliwości harmonicznych.

Drugi wyraz jest znacznie mniejszy od pierwszego i wobec tego przy wyznaczaniu warunku amplitudy można przyjąć: $\Delta_{11} \approx \Delta_{11}^I$.

Podstawiając rozwiązanie (34) do wyrażenia na przewodność (29) i dzieląc obie strony przez G_1 , otrzymamy wyrażenie na przewodność rzeczywistą w postaci unormowanej

$$\frac{G(\omega_1)}{G_1} = \frac{(1+a) + (a\Delta_{11}^{I2} + \Delta_{12}^2)}{(1+a)^2 + (a\Delta_{11}^I + \Delta_{12}^I)^2} = S_1(a\Delta_{12}). \quad (35)$$

Postępując w sposób podobny jak dla drgań o częstotliwości ω_1 wyznaczamy admitancję $\hat{Y}(\omega_2)$ w postaci

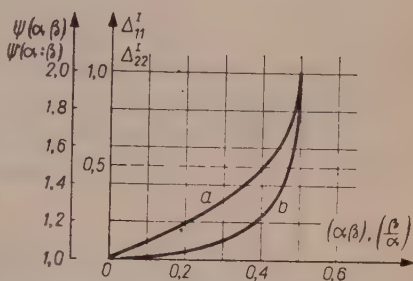
$$\hat{Y}(\omega_2) = G(\omega_2) + jB(\omega_2) \quad (36)$$

gdzie

$$G(\omega_2) = \frac{(1+a) + (a\Delta_{21}^2 + \Delta_{22}^2)}{(1+a)^2 + (a\Delta_{21} + \Delta_{22})^2} \cdot G_1 \quad (37)$$

$$B(\omega_2) = \frac{\Delta_{21}(1 + \Delta_{22}^2) + a\Delta_{22}(1 + \Delta_{21}^2)}{(1+a)^2 + (a\Delta_{21} + \Delta_{22})^2} \cdot G_1 \quad (38)$$

$$\Delta_{21} = Q_1 \left[\left(\frac{\omega_2}{\omega_{01}} \right)^2 - 1 \right], \quad \Delta_{22} = Q_2 \left[\left(\frac{\omega_2}{\omega_{02}} \right)^2 - 1 \right] \quad (39)$$



Rys. 5. a) Krzywa względnego uchybu częstotliwości Δ_{11}^I i Δ_{12}^I w zależności od współczynników a i β
b) Krzywa zależności współczynnika ψ od współczynników a i β

oraz odstrojenie Δ_{22} częstotliwości ω_2 od częstotliwości rezonansowej ω_{02}

$$\Delta_{22} = \Delta_{22}^I + \frac{B(\omega_2)}{G_1} + [(1+a)^2 + (a\Delta_{21} + \Delta_{22}^I)^2] \psi\left(\frac{1}{a} \cdot \beta_2\right) \frac{1}{1 + \Delta_{21}^2} \quad (40)$$

gdzie

$$\Delta_{22}^I = -\left(\frac{1}{a} \cdot \beta_2\right) \cdot \psi\left(\frac{1}{a} \cdot \beta_2\right), \quad (41)$$

$$\beta_2 = \frac{\Delta_{21}}{1 + \Delta_{21}^2} \approx \beta.$$

Przebiegi $\beta = f_1(\Delta_{21})$, $\Delta_{22}^I = f_2\left(\frac{1}{a} \cdot \beta\right)$ oraz $\psi\left(\frac{1}{a} \cdot \beta\right)$ są podane na rys. 3 i 5.

Podobnie jak w przypadku drgań o częstotliwości ω_1 pierwszy wyraz określa wpływ obwodu obcego tj. 1. na częstotliwość drgań ω_2 obwodu 2.; drugi wyraz — wpływ częstotliwości harmonicznych.

Podstawiając (41) do (37) i dzieląc obie strony przez G_1 otrzymujemy wyrażenie na całkowitą przewodność rzeczywistą dla drgań o częstotliwości ω_2 w postaci unormowanej

$$\frac{G(\omega_2)}{G_1} = \frac{(1+a) + (a\Delta_{21}^2 + \Delta_{22}^{I2})}{(1+a)^2 + (a\Delta_{21} + \Delta_{22}^I)^2} = S_2(a_1\Delta_{21}). \quad (42)$$

2.3. Warunki równoczesnego wytwarzania drgań stabilnych o dwóch częstotliwościach nieharmonicznych

Warunek równoczesnego wytwarzania dwóch drgań stabilnych o częstotliwościach ω_1 i ω_2 wymaga, ażeby były spełnione jednocześnie następujące zależności, określające tzw. warunek równowagi admitancji:

$$\hat{Y}_{11} + \hat{Y}(\omega_1) = 0. \quad (43)$$

$$\hat{Y}_{21} + \hat{Y}(\omega_2) = 0. \quad (44)$$

Podstawiając do równań (43) i (44) wyrażenia (13) i (14) oraz (28) i (36) otrzymujemy

$$G_{11} + jB_{11} + G(\omega_1) + jB(\omega_1) = 0, \quad (45)$$

$$G_{21} + jB_{21} + G(\omega_2) + jB(\omega_2) = 0. \quad (46)$$

Z równań tych otrzymujemy dwa warunki amplitudy i dwa warunki fazy

$$G_{11} + G(\omega_1) = 0; \quad G_{21} + G(\omega_2) = 0, \quad (47)$$

$$B_{11} + B(\omega_1) = 0; \quad B_{21} + B(\omega_2) = 0. \quad (48)$$

Z warunku (47) otrzymujemy wyrażenia na amplitudy obu drgań.

Do równania (47) podstawiamy wyrażenia (15), (17), (35), (42)

$$-g[1 + \mu(1 + 2q^2) - 2\mu^2\varepsilon(1 + 6q^2 + 3q^4)] + G_1 S_1(aA_{12}) = 0, \quad (49)$$

$$-g[1 + \mu(2 + q^2) - 2\mu^2\varepsilon(q^4 + 6q^2 + 3)] + G_1 S_2(aA_{21}) = 0. \quad (50)$$

Dzieląc oba równania przez g i oznaczając

$$\frac{G_1}{g} S_1(a_1 A_{12}) - 1 = g_1; \quad \frac{G_1}{g} S_2(a_1 A_{21}) - 1 = g_2, \quad (51)$$

otrzymujemy układ dwóch równań kwadratowych z dwoma niewiadomymi μ i q^2 oraz dwoma parametrami g_1 i g_2

$$\begin{aligned} 2\mu^2\varepsilon(1 + 6q^2 + 3q^4) - \mu(1 + 2q^2) + g_1 &= 0 \\ 2\mu^2\varepsilon(q^4 + 6q^2 + 3) - \mu(2 + q^2) + g_2 &= 0. \end{aligned} \quad (52)$$

Rozwiązanie układu równań (52) daje nam wartość amplitudy napięcia drgań o częstotliwości ω_1 : $\bar{U}_{11}^2 = \frac{4}{3} \frac{\mu}{\varepsilon}$ oraz stosunek amplitud

$$\text{napięcia obu drgań: } q^2 = \frac{\bar{U}_{21}^2}{\bar{U}_{11}^2}.$$

Rozwiązanie układu równań (52) przeprowadzamy na drodze wykresowej jako przecięcie krzywych $\mu^I = f^I(q^2)_{g_1}$, $\mu^{II} = f^{II}(q^2)_{g_2}$, gdzie μ^I i μ^{II} są rozwiązaniami równań kwadratowych (52) względem μ dla różnych wartości parametrów g_1 i g_2 .

Z układu równań (52) otrzymujemy

$$4\varepsilon\mu_{1,2}^I = \frac{1 + 2q^2}{1 + 6q^2 + 3q^4} \left[1 \pm \sqrt{1 - (8\varepsilon g_1) \frac{1 + 6q^2 + 3q^4}{(1 + 2q^2)^2}} \right], \quad (53)$$

$$4\varepsilon\mu_{3,4}^{II} = \frac{2 + q^2}{q^4 + 6q^2 + 3} \left[1 \pm \sqrt{1 - (8\varepsilon g_2) \frac{q^4 + 6q^2 + 3}{(2 + q^2)^2}} \right]. \quad (54)$$

Stabilność rozwiązania dla stanu ustalonego dwóch drgań równoczesnych wyznaczmy za pomocą określenia obszaru minimum energii potencjalnej układu.

Energia potencjalna układu dynamicznego o dwóch stopniach swobody jest funkcją dwóch współrzędnych położenia; oznaczmy ją przez $V(x, y)$. W przypadku ruchu periodycznego amplitudy stanu ustalonego poszczególnych drgań można traktować jako współrzędne położenia równowagi [2]. Położenie równowagi lub ruch ustalony układu dynamicznego odpowiada ekstremum energii potencjalnej; z rodzaju ekstremum tj. minimum lub maksimum wynika stabilność lub labilność równowagi. Zgodnie z teorematem Lagrange'a położenie równowagi układu dyna-

micznego jest stabilne jeżeli energia potencjalna osiąga minimum w punkcie równowagi. Jeżeli więc będziemy mogli określić rodzaj ekstremum energii potencjalnej dla współrzędnych odpowiadających amplitudom stanu ustalonego drgań układu — określimy jednocześnie stabilność rozwiązania.

Współrzędne (x_0, y_0) położenia równowagi można wyznaczyć z warunku koniecznego istnienia ekstremum funkcji $V(x, y)$ tj.

$$V_x(x, y)_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} = 0; \quad V_y(x, y)_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} = 0 \quad (55)$$

Jeżeli przez $f^I(x, y)$ i $f^{II}(x, y)$ oznaczmy siły działające na układ w kierunku współrzędnych x i y odpowiednio, to możemy napisać następującą zależność między energią potencjalną $V(x, y)$ układu i funkcjami f^I i f^{II}

$$V(x, y) = - \int_{x_0, y_0}^{x, y} (f^I dx + f^{II} dy). \quad (56)$$

Wynik całkowania nie będzie zależał od drogi całkowania a tylko od wartości końcowych, jeżeli wyrażenie podcałkowe będzie różniczką zupełną. Funkcje f^I i f^{II} muszą zatem spełniać warunek

$$f_y^I(x, y) = f_x^{II}(x, y). \quad (57)$$

Biorąc pod uwagę zależność (56) napiszemy

$$\begin{aligned} V_x(x, y) &= -f^I(x, y), \\ V_y(x, y) &= -f^{II}(x, y) \end{aligned} \quad (58)$$

i warunek (55) wyrazi się

$$\begin{aligned} f^I(x_0, y_0) &= 0, \\ f^{II}(x_0, y_0) &= 0. \end{aligned} \quad (59)$$

Warunkiem koniecznym i wystarczającym istnienia ekstremum funkcji dwóch zmiennych w punkcie (x_0, y_0) jest dodatnia wartość wyróżnika funkcji w tym punkcie tj.

$$W(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} V_{xx}(x, y) & V_{xy}(x, y) \\ V_{yx}(x, y) & V_{yy}(x, y) \end{vmatrix}_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} > 0 \quad (60)$$

Warunkiem minimum jest

$$V_{xx}(x_0, y_0) > 0. \quad (61)$$

Biorąc pod uwagę zależności wyrażone przez (56), (57), (58), warunek istnienia ekstremum (60) napiszemy

$$W(x_0, y_0) = f_x^I(x_0, y_0) \cdot f_y^{II}(x_0, y_0) - [f_y^I(x_0, y_0)]^2 > 0 \quad (62)$$

oraz warunek minimum

$$f_x^I(x_0, y_0) < 0. \quad (63)$$

Rozpatrzmy warunek generacji jednoczesnej dwóch drgań (47) w postaci

$$\begin{aligned} f^I(\bar{U}_{11}, \bar{U}_{21}) &= \bar{U}_{11} [G_{11} + G(\omega_1)] = 0, \\ f^{II}(\bar{U}_{11}, \bar{U}_{21}) &= \bar{U}_{21} [G_{21} + G(\omega_2)] = 0. \end{aligned} \quad (64)$$

W równaniach tych $G_{11}(\bar{U}_{11}\bar{U}_{21})$, $G_{21}(\bar{U}_{11}\bar{U}_{21})$ są funkcjami amplitud obu drgań, określonymi wyrażeniami (15), (17). W stanie ustalonym (stanie równowagi) ruchu periodycznego siła działająca na układ (średnia wartość siły przy ruchu periodycznym jednostajnym) jest równa zeru. Stan taki odpowiada warunkom określonym równaniem (59), w którym $x_0 = \bar{U}_{11}$ i $y_0 = \bar{U}_{21}$.

Rozwiązanie układu równań (64) daje nam amplitudy stanu ustalonego ruchu periodycznego o dwóch stopniach swobody. Odpowiednikiem siły w układzie mechanicznym jest spadek napięcia (I. R.) lub spływ prądu (U. G.) w układzie elektrycznym i wobec tego równania (64) muszą również spełniać warunek (57).

Warunek ten sprawdzamy przez różniczkowanie i piszemy

$$f^I(\bar{U}_{11}, \bar{U}_{21}) = \bar{U}_{11}g[\mu(1+2q^2) - 2\mu^2\varepsilon(1+6q^2+3q^4) - g_1], \quad (65)$$

$$f^{II}(\bar{U}_{11}, \bar{U}_{21}) = \bar{U}_{21}g[\mu(2+q^2) - 2\mu^2\varepsilon(3+6q^2+q^3) - g_2]. \quad (66)$$

Obliczamy pochodną cząstkową funkcji f^I względem \bar{U}_{21} oraz funkcji f^{II} względem \bar{U}_{11} pamiętając, że

$$\mu = \frac{3}{4}\kappa\bar{U}_{11}^2, \quad q^2 = \frac{\bar{U}_{21}^2}{\bar{U}_{11}^2},$$

$$\frac{\partial f^I(\bar{U}_{11}, \bar{U}_{21})}{\partial \bar{U}_{21}} = 2\mu q \cdot g[2 - 3(4\mu\varepsilon)(1+q^2)], \quad (67)$$

$$\frac{\delta f^{II}(\bar{U}_{11}, \bar{U}_{21})}{\delta \bar{U}_{11}} = 2\mu q \cdot g[2 - 3(4\mu\varepsilon)(1+q^2)]. \quad (68)$$

Wyrażenia (67) i (68) są sobie identycznie równe tj.

$$\frac{\partial f^I(\bar{U}_{11}, \bar{U}_{21})}{\partial \bar{U}_{21}} \equiv \frac{\partial f^{II}(\bar{U}_{11}, \bar{U}_{21})}{\partial \bar{U}_{11}}$$

i wobec tego spełniony jest warunek (57).

Tym samym dla stwierdzenia stabilności ruchu stanu ustalonego możemy skorzystać z twierdzenia o minimum energii potencjalnej układu.

Określamy warunek minimum (63) obliczając pochodną cząstkową funkcji $f^I(\bar{U}_{11}, \bar{U}_{21})$ względem \bar{U}_{11} lub funkcji $f^{II}(\bar{U}_{11}, \bar{U}_{21})$ względem \bar{U}_{21} , uwzględniając, jak wyżej, że

$$\mu = \frac{3}{4} \kappa \bar{U}_{11}^2, \quad q^2 = \frac{\bar{U}_{21}^2}{\bar{U}_{11}^2}$$

$$\frac{\partial f^I(\bar{U}_{11}, \bar{U}_{21})}{\partial \bar{U}_{11}} = g[\mu(3 + 2q^2) - 2\mu^2\varepsilon(5 + 18q^2 + 3q^4) - g_1], \quad (69)$$

$$\frac{\partial f^{II}(\bar{U}_{11}, \bar{U}_{21})}{\partial \bar{U}_{21}} = g[\mu(2 + 3q^2) - 2\mu^2\varepsilon(3 + 18q^2 + 5q^4) - g_2]. \quad (70)$$

Podstawiając warunek generacji (52) do wyrażeń (69), (70) otrzymamy

$$\frac{\partial f^I(\bar{U}_{11}, \bar{U}_{21})}{\partial \bar{U}_{11}} = -2\mu g[4\mu\varepsilon(1 + 3q^2) - 1], \quad (71)$$

$$\frac{\partial f^{II}(\bar{U}_{11}, \bar{U}_{21})}{\partial \bar{U}_{21}} = -2\mu g q^2[4\mu\varepsilon(3 + q^2) - 1]. \quad (72)$$

Warunkiem koniecznym stabilności stanu ustalonego jest zgodnie z (63)

$$\frac{\partial}{\partial \bar{U}_{11}} f^I(\bar{U}_{11}, \bar{U}_{21}) < 0;$$

lub

$$\frac{\partial}{\partial \bar{U}_{21}} f^{II}(\bar{U}_{11}, \bar{U}_{21}) < 0.$$

Ponieważ $-2\mu g q$ oraz $-2\mu g q^2$ jest zawsze mniejsze od zera, musi być spełniona nierówność

$$4\mu\varepsilon(1 + 3q^2) - 1 > 0$$

lub

$$4\mu\varepsilon(3 + q^2) - 1 > 0.$$

Stąd otrzymamy warunek stabilności w postaci

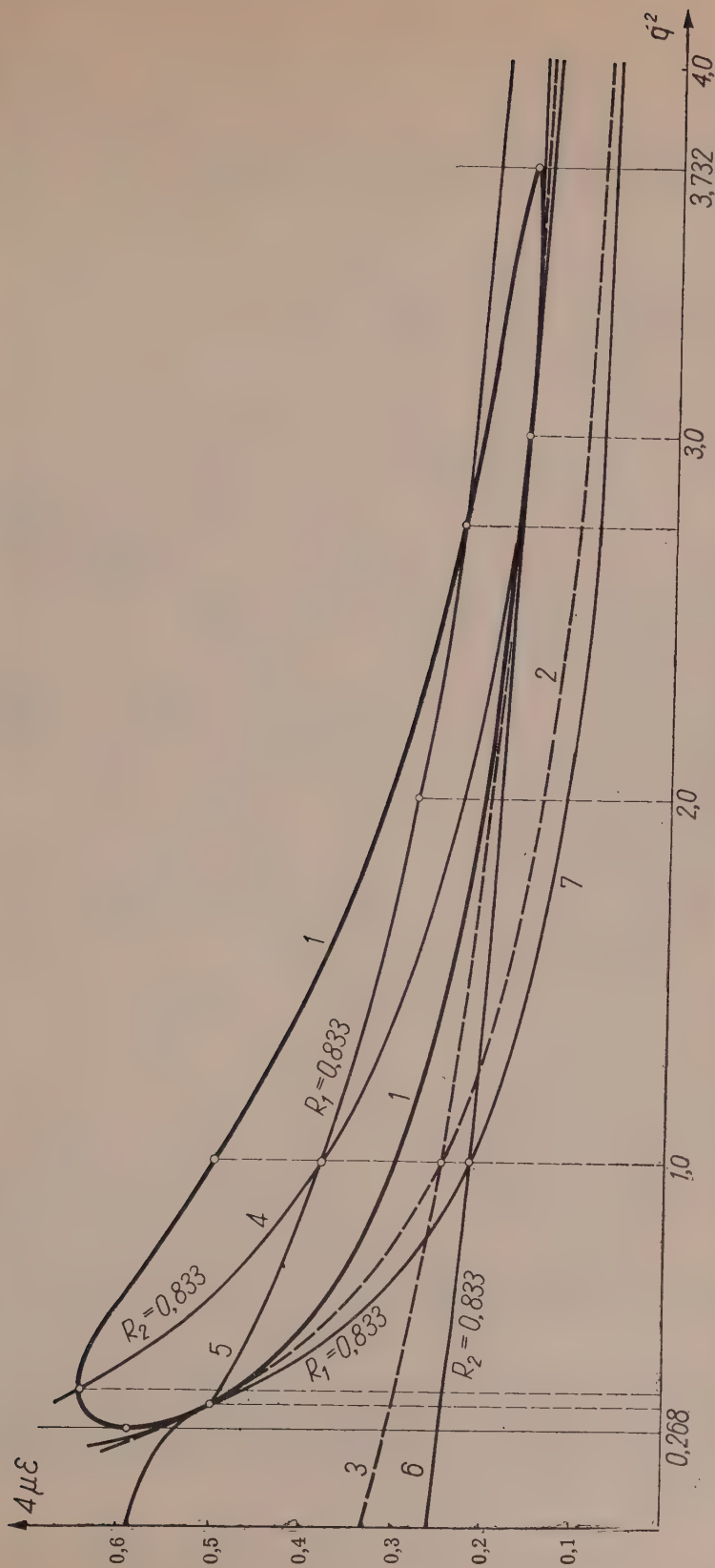
$$4\mu\varepsilon > \frac{1}{1 + 3q^2} \quad (73)$$

lub

$$4\mu\varepsilon > \frac{1}{3 + q^2}. \quad (74)$$

Podstawiając wyrażenia (71), (72) i (67) do warunku (62) otrzymuje się warunek wystarczający istnienia ekstremum

$$4\mu^2 g^2 q^2 [4\mu\varepsilon(1 + 3q^2) - 1][4\mu\varepsilon(q^2 + 3) - 1] - 4\mu^2 g^2 q^2 [2 - 3(4\mu\varepsilon)(1 + q^2)]^2 > 0. \quad (75)$$



Rys. 6. Wykreślne rozwiązanie układu równań (52) w układzie współrzędnych ($4\mu E$, q^2).

1. — Krzywa ograniczająca obszar, w którym może istnieć ekstremum; warunek (76), 2, 3 — Krzywe, powyżej których może istnieć minimum; warunek (73), (74), 4, 5 — Krzywe opisane układem równań (80), 6, 7 — Krzywe opisane układem równań (82).

Ponieważ $4\mu^2 g^2 q^2 > 0$ wyrażenie (73) po zredukowaniu przyjmie postać $-(4\mu\epsilon)^2 [6q^4 + 8q^2 + 6] + (4\mu\epsilon) 8(1 + q^2) - 3 > 0$; biorąc pod uwagę, że $6q^4 + 8q^2 + 6 > 0$ warunek ten będzie spełniony, gdy

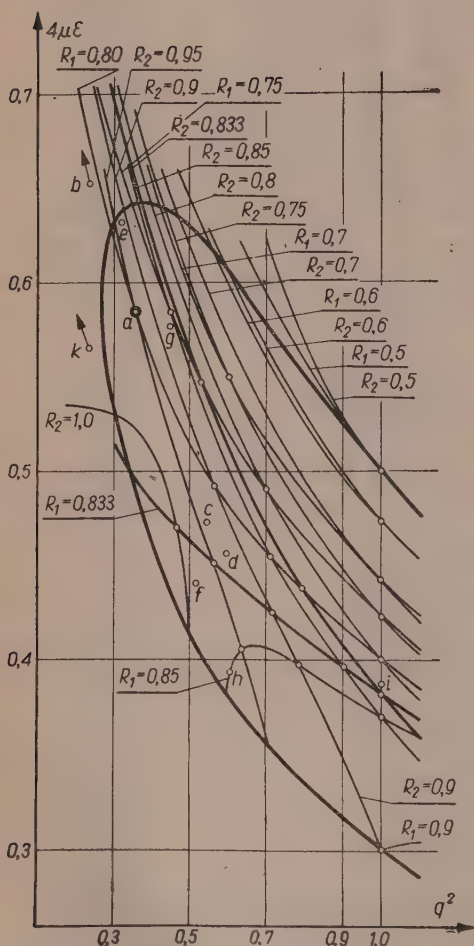
$$(4\mu\epsilon)_2 < (4\mu\epsilon) < (4\mu\epsilon)_1, \quad (76)$$

gdzie $(4\mu\epsilon)_{1,2}$ są pierwiastkami równania:

$$(4\mu\epsilon)^2 (6q^4 + 8q^2 + 6) + (4\mu\epsilon) 8(1 + q^2) - 3 = 0$$

i wynoszą

$$(4\mu\epsilon)_{1,2} = 2 \frac{1 + q^2}{(3q^4 + 4q^2 + 3)} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{3}{8} \frac{3q^4 + 4q^2 + 3}{(1 + q^2)^2}} \right). \quad (77)$$



Rys. 7 Wykreślne rozwiązanie układu równań (52). Fragment wykresu z rys. 6.

Ponieważ $(4\mu\epsilon)$ jest wielkością rzeczywistą, wyrażenie podpierwiastkowe musi być dodatnie, co ma miejsce, gdy

$$0,268 < (q^2) < 3,732. \quad (78)$$

Oznacza to, że w przypadku drgań stabilnych stosunek amplitud obu drgań może się zawierać w granicach

$$0,52 < \frac{\bar{U}_{21}}{\bar{U}_{11}} < 1,93. \quad (79)$$

Rozwiązanie układu równań (52) zostało podane na wykresie na rys. 6. Jako rzędną przyjęto wartość względną $4\mu\epsilon$ proporcjonalną do kwadratu amplitudy drgań o częstotliwości ω_1 ; jako odciętą — kwadrat stosunku amplitud napięć obu drgań: $q^2 = \frac{\bar{U}_{21}^2}{\bar{U}_{11}^2}$.

Obszar rozwiązań stabilnych leży wewnątrz krzywej zamkniętej 1, rozciągającej się zgodnie z (78) w przedziale q (0,52; 1,93). W układzie współrzędnych $(\bar{U}_{11}, \bar{U}_{21})$ krzywa zamknięta przyjmuje postać elipsy (np. rys. 5 [18]). Na rys. 7 podano krzywą w zakresie q (0,1) wobec symetrii układu względem amplitud obu drgań.

Krzywa zamknięta leży ponad krzywymi 2. i 3., określającymi dolną granicę wartości $4\mu\epsilon$, przy których istnieje ekstremum. Wnętrze krzywej zamkniętej jest wypełnione krzywymi, które są rozwiązaniami ogólnymi (53) i (54) w postaci

$$4\mu_1\epsilon = f^I(q \cdot R_1) = \frac{1+2q^2}{1+6q^2+3q^4} \left[1 + \sqrt{1 - R_1 \frac{1+6q^2+q^4}{(1+2q^2)^2}} \right],$$

$$4\mu_3\epsilon = f^{III}(q \cdot R_2) = \frac{2+q^2}{3+6q^2+q^4} \left[1 + \sqrt{1 - R_2 \frac{3+6q^2+q^4}{(2+q^2)^2}} \right]. \quad (80)$$

Przecięcia krzywych dają rozwiązanie układu równań (80), które określa wartość względną $4\mu\epsilon$, proporcjonalną do kwadratu amplitudy drgań o częstotliwości ω_1 oraz kwadrat stosunku amplitud obu napięć q^2 . Współczynniki R_1 i R_2 są parametrami układu równań (80).

Z przebiegu krzywych i położenia przecięć wynika, że rozwiązania istnieją tylko dla ograniczonego przedziału wartości parametrów R_1 i R_2 . Na wartość R_1 i R_2 wpływa kształt charakterystyki elementu pobudzającego wyrażający się współczynnikiem $\epsilon = \frac{5}{9} \cdot \frac{\lambda}{\kappa^2}$, stosunek części linio-

wej przewodności charakterystyki g do przewodności obciążenia obwodu G_1 , rozstrojenie obwodów, wyrażające się współczynnikami $S_1(\alpha, \Delta_{12})$ i $S_2(\alpha, \Delta_{21})$ oraz stosunek przewodności obciążenia obu obwodów $\alpha = \frac{G_1}{G_2}$.

Zależności te są określone następującymi wyrażeniami

$$R_1 = 8\epsilon \left[\frac{G_1}{g} \cdot S_1(\alpha, \Delta_{12}) - 1 \right],$$

$$R_2 = 8\epsilon \left[\frac{G_1}{g} \cdot S_2(\alpha, \Delta_{21}) - 1 \right]. \quad (81)$$

Na rysunku 8 podano przebieg zależności $S_1(\alpha, \Delta_{12})$ w funkcji rozstrojenia Δ_{12} dla kilku wartości α . Wykres podano w ograniczonym zakresie Δ_{12} , stosownie do warunku (32). Z wyrażeń (35), (42) wynika, że $S_2(\alpha, \Delta_{21}) = \frac{1}{\alpha} \cdot S_1\left(\frac{1}{\alpha}, \Delta_{21}\right)$, wobec czego wykres może być wykorzystany dla obu współczynników.

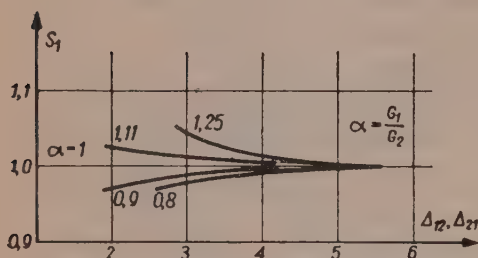
Na rysunku 9 przedstawiono szereg charakterystyk elementu pobudzającego o różnych współczynnikach kształtu ϵ , lecz stałej wartości przewodności g .

Numeryczne przykłady pozwalają na ilościową ocenę wpływów poszczególnych czynników na warunek równoczesnego wytwarzania drgań stabilnych.

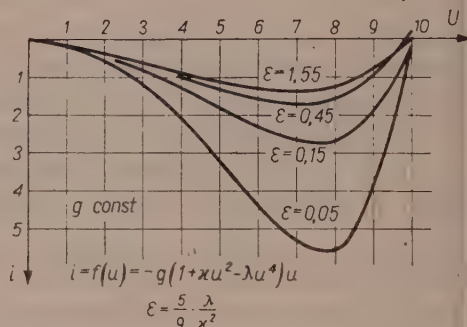
Rozważymy rozwiązania, odpowiadające punktowi przecięcia krzywych o parametrach $R_1=0,8$ i $R_2=0,95$, którego współrzędne wynoszą $q^2=0,36$ ($q=0,6$), $4\mu\varepsilon=0,585$.

Przyjmijmy, że współczynnik kształtu charakterystyki elementu pobudzającego wynosi $\varepsilon=0,05$ oraz rozstrojenie obwodów $\Delta_{012}=2,5$. Wówczas z wzoru (81) oraz za pomocą krzywych na rys. 8 otrzymujemy $\alpha=0,92$, $\frac{G_1}{g}=3,06$.

Wpływ rozstrojenia obwodów na stabilność drgań równoczesnych określonych tym rozwiązaniem badamy obliczając wartość parametrów



Rys. 8. Wykres zależności współczynnika S_1 od względnego rozstrojenia obwodów Δ_{12} , Δ_{21} .



Rys. 9. Charakterystyki oporu ujemnego o różnym współczynniku kształtu ε

R_1 i R_2 dla różnych wartości Δ_{012} przy zachowaniu stałej wartości α i obserwując położenie przecięć odpowiednich krzywych. Wyniki zestawiono w tabl. 1, punkty przecięć zaznaczono na rys. 7.

Tablica 1

$\alpha=0,92; \frac{G_1}{g}=3,06$				
Δ_{012}	2	2,5	3	≥ 4
Położenie na rys. 7	b	a	c	d

Z rozkładu punktów przecięcia wynika, że rozstrojenie obwodów nie zaburza stabilności drgań, natomiast zbliżenie częstotliwości rezonansowych odsuwa równowagę układu w obszar niestabilny. Wynika to stąd, że w przedziale wartości rozstrojenia $\Delta_{012} < 2,5$ wartości współczynników S_1 i S_2 silniej zmieniają się ze zmianą Δ_{012} wskutek czego zostaje zaburzony warunek amplitudy. Natomiast przy większych wartościach Δ_{012} zmiany S_1 i S_2 są niewielkie i nie wpływają na warunek amplitudy.

Podobnie badamy wpływ stosunku przewodności obciążenia G_1 do

przewodności g elementu pobudzającego. Wyniki zestawione w tabl. 2 dla dwóch wartości rozstrojenia $\Delta_{012}=2,5$ i $\Delta_{012}=4$ przy stałej wartości $\alpha=0,92$ i $\varepsilon=0,05$ wskazują, że procentowo niewielkie zmiany wartości $\frac{G_1}{g}$ odsuwają równowagę układu na granicę stabilności. Wynika to stąd, że warunek amplitudy silnie zależy od przewodności obciążenia G_1 i G_2 .

Tablica 2

$\alpha=0,92;$		$\varepsilon=0,05$				
1		$\Delta_{012}=2,5$			$\Delta_{012}=4$	
$\frac{G_1}{g}$		0,98	1	1,03	0,95	1,02
Położenie na rys. 7		e	a	f	g	d

Wpływ zmiany stosunku obciążenia obu obwodów $\alpha = \frac{G_1}{G_2}$ ilustrują wyniki zestawione w tabl. 3 dla warunków jak wyżej. Zwiększenie α nie zaburza stabilności równowagi układu i dla α dążącego do jedności układ dąży do stanu dynamicznego, w którym amplitudy obu drgań są sobie równe tj. $q=1$. Natomiast zmniejszenie α wytrąca układ z równowagi. wskutek tego, że podobnie jak w przypadku zmian rozstrojenia Δ_{012} zmiany S_1 i S_2 dla α malejącego silniej wpływają na warunek amplitudy niż dla $\alpha=1$.

Tablica 3

a	$\Delta_{012}=2,5$			$\Delta_{012}=4$		
	0,91	0,92	1	0,88	0,92	1
Położenie na rys. 7	b	a	i	k	d	i

Współczynnik kształtu ε wpływa na zakres dopuszczalnych zmian wyżej omówionych czynników, w którym są zabezpieczone warunki równoczesnego wytwarzania dwóch drgań stabilnych.

Wykazać to można zakładając w poprzednim przypadku wartość współczynnika kształtu $\varepsilon=1,55$. Dla $\Delta_{012}=2,5$ otrzymamy $\alpha=0,99$ i $\frac{G_1}{g}=1,065$. Biorąc pod uwagę, że dla wartości α bliskiej jedności współczynniki przewodności rzeczywistej obwodów drgań S_1 i S_2 są prawie stałe i niezależne od Δ_{012} należy wnioskować, że wpływ przestrajania obwodów na stabilność układu jest mniejszy przy większych wartościach współczynnika ε . Natomiast zmiana $\frac{G_1}{g}$ o zaledwie $\pm 0,5\%$ zaburza waru-

nek amplitudy i układ przestaje być stabilnym, co oznacza, że nie mogą być wytwarzane dwa drgania jednocześnie. Podobny efekt wywołuje zmiana stosunku obciążenia obwodów $\alpha = 0,5\%$.

Z wykresu na rys. 7 wynika, że dla spełnienia warunku równoczesnego wytwarzania dwóch drgań stabilnych wartość parametrów R_1 i R_2 musi zawierać się w granicach $0,5 < R < 0,9$. Dla granicznych wartości R można określić przedział dopuszczalnych zmian stosunku $\frac{G_1}{g}$ w zależności od współczynnika kształtu charakterystyki. W tablicy 4 zestawiono wyniki dla $\alpha=1$, tj. dla $R=R_1=R_2$. Wykazują one również, że wzrost wartości ε znacznie zawęży dopuszczalny zakres stosunku przewodności obciążenia obwodów drgań do przewodności charakterystyki elementu pobudzającego.

Tablica 4

$\alpha=1$								
ε	0,05		0,15		0,45		1,55	
R	min	max	min	max	min	max	min	max
G_1	2,25	3,2	1,43	1,74	1,14	1,25	1,04	1,07
g	1	1,43	1	1,22	1	1,1	1	1,03

Natomiast przestrzajanie obwodów, w których $\alpha=1$ ze względu na przebieg S_1 i S_2 nie wpływa na stabilność drgań równoczesnych dopóki rozstrojenie Δ_{012} nie przekroczy dolnej wartości granicznej określonej wyrażeniem (32).

Z przytoczonych obliczeń wynika, że dla uzyskania dwóch równoczesnych drgań stabilnych obwody drgań muszą spełniać w zależności od rozstrojenia Δ_{012} ściśle określone warunki na wzajemny stosunek przewodności dynamicznych obu obwodów $\alpha = \frac{G_1}{G_2}$ oraz na stosunek prze-

wodności dynamicznych G_1 i G_2 do przewodności rzeczywistej charakterystyki elementu pobudzającego. Dopuszczalna tolerancja wartości tych wielkości zależy przede wszystkim od współczynnika kształtu charakterystyki elementu pobudzającego ε .

Przykłady wykazują, że w niektórych przypadkach różnica między wartością teoretyczną, zabezpieczającą spełnienie warunku równoczesnego wytwarzania dwóch drgań, a wartością rzeczywistą, wynosząca $\pm 0,5\%$ uniemożliwia praktycznie uzyskanie dwóch równoczesnych drgań stabilnych.

Przy małych wartościach współczynnika kształtu charakterystyki warunki są korzystniejsze i można uzyskać stabilne rozwiązanie przy różnicach wynoszących parę procent.

Krzywe, które są rozwiązaniami ogólnymi równań

$$4\mu_2\varepsilon = f^{\text{II}}(g, R_1) = \frac{1+2q^2}{1+6q^2+3q^4} \left[1 - \sqrt{1 - R_1 \frac{1+6q^2+3q^4}{1+2q^2}} \right],$$

$$4\mu_4\varepsilon = f^{\text{IV}}(g, R_2) = \frac{2+q^2}{3+6q^2+q^4} \left[1 - \sqrt{1 - R_2 \frac{3+6q^2+q^4}{2+q^2}} \right] \quad (82)$$

leżą poniżej krzywych 2. i 3. i wobec tego są rozwiązaniami niestabilnymi.

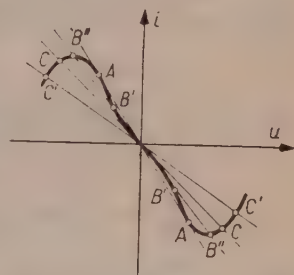
Dla wyjaśnienia znaczenia pewnych granicznych wartości kwadratu bezwymiarowej amplitudy $4\mu\varepsilon$, rozważmy przypadek, w którym układ oscyluje tylko na jednej częstotliwości np. ω_1 , natomiast drgania drugiej częstotliwości są wygaszone, tj.

$$q^2 = 0. \quad (83)$$

Podstawiając (83) w wyrażenie (53) otrzymamy

$$(4\mu_0\varepsilon)_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 - (8\varepsilon \cdot g_1)}. \quad (84)$$

Z warunku, że amplituda drgań jest wielkością dodatnią i rzeczywistą wynikają następujące wartości graniczne amplitudy: z warunku wartości rzeczywistej: $(1 - 8\varepsilon g_1) \geq 0$ wynika wartość graniczna dolna amplitudy (dla $1 - 8\varepsilon g_1 = 0$): $(4\mu_0\varepsilon)_{gr} = 1$, która odpowiada styczności charakterystyki elementu pobudzającego z prostą obciążenia, jak na rys. 10 punkt A. W przedziale wartości wyróżnika: $0 < (1 - 8\varepsilon g) < 1$ otrzymujemy dwa rozwiązania $(4\mu_0\varepsilon)_1 \neq (4\mu_0\varepsilon)_2$ tj. dwie możliwe amplitudy różne od zera, odpowiadające punktom przecięcia B^{I} i B^{II} . Dla $(1 - 8\varepsilon g) \geq 1$ otrzymujemy jeden pierwiastek dodatni — jedną możliwą amplitudę, różną od zera — odpowiadający przecięciu krzywych w punktach C, C^{I} , C^{II} itd.; p. C dla którego $(1 - 8\varepsilon g) = 1$ i $(4\mu_0\varepsilon)_{mx} = 2$, odpowiada styczności charakterystyk w początku układu współrzędnych.



Rys. 10. Charakterystyki ilustrujące różne warunki pracy generatora o oporze ujemnym.

Rozpatrując warunek stabilności rozwiązania (73)

$$(4\mu\varepsilon) > \frac{1}{1+3q^2} \quad \text{dla } q^2 = 0$$

otrzymamy: $(4\mu\varepsilon) > 1$ jako warunek stabilności drgań. Zgodnie z tym amplitudy odpowiadające przecięciu w punkcie p. B^{I} tj. dla $0 < (4\mu\varepsilon) < 1$ będą niestabilne a odpowiadające punktom A, B^{II} , C tj. dla $4\mu\varepsilon > 1$ — stabilne, co jest zgodne z wnioskami innych metod.

Rozważmy warunek stabilności jednoczesnych drgań dla $q^2 = 1$. Jak

wynika z równania (77) oraz z wykresu (rys. 7) kwadrat bezwymiarowej amplitudy $(4\mu\varepsilon)$ dla $q^2=1$ winien zawierać się w granicach

$$0,3 < (4\mu\varepsilon) < 0,5.$$

Jeżeli amplitudę drgania unormujemy względem amplitudy granicznej,

określając $u_{11} = \sqrt{\frac{4\mu\varepsilon}{(4\mu_0\varepsilon)_{gr}}}$ otrzymamy

$$u_{gr} = 1; \quad u_{mx} = \sqrt{2}$$

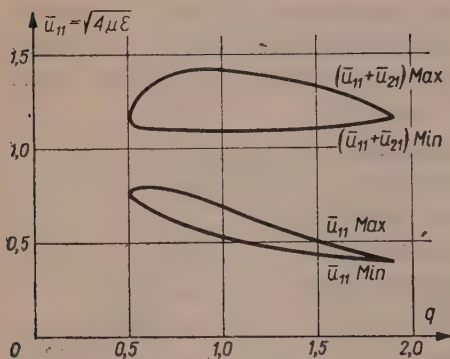
oraz

$$\sqrt{0,3} < u_{11} < \sqrt{0,5}, \quad (85)$$

czyli

$$0,55 < u_{11} < 0,707.$$

Biorąc pod uwagę, że dla $q=1$: $u_{11}=u_{21}$ warunek (85) oznacza, że suma algebraiczna amplitud obu drgań musi być większa od amplitudy granicznej, a mniejsza od amplitudy maksymalnej $1,1 < (u_{11} + u_{21}) < \sqrt{2}$.



Rys. 11. Wykres wartości maksymalnej i minimalnej sumy algebraicznej amplitud dwóch równoczesnych drgań stabilnych w zależności od q .

Wniosek ten jest słuszny również dla innych wartości $q \neq 1$ w przedziale $0,268 < q < 3,732$ na co wskazuje wykres na rys. 11.

W obszarze pracy generatora, w którym mogą być wytwarzane jednocześnie dwa drgania stabilne, układ nie jest samowzbudny ze względu na wklęsły kształt charakterystyki oporu ujemnego i dlatego dla wzbudzenia drgań o jednej lub dwóch różnych częstotliwościach należy przyłożyć impuls pobudzający o odpowiedniej amplitudzie.

Zbadamy obecnie możliwość samowzbudzenia drgań o częstotliwości ω_1 gdy układ oscyluje na częstotliwości ω_2 .

Rozważmy znak pochodnej (69) dla $\bar{U}_{11}=0$: $\left[\frac{\partial f^I(\bar{U}_{11}, \bar{U}_{21})}{\partial U_{11}} \right]_{\bar{U}_{11}=0}$.

Eliminując parametr g_1 , wprowadzając amplitudę μ_0 stanu ustalonego drgań pojedynczych na częstotliwości ω_1 , oraz stosunek amplitud stanu ustalonego drgań pojedynczych na częstotliwości ω_1 i ω_2

$$q_0 = \frac{\bar{U}_{210}}{\bar{U}_{110}}. \quad (86)$$

otrzymamy po odpowiednim przekształceniu

$$\left[\frac{\partial f^I(\bar{U}_{11}, \bar{U}_{21})}{\partial \bar{U}_{11}} \right]_{\bar{U}_{11}=0} = -\mu_0 (1 - 2q_0^2) + 2\mu_0^2 \varepsilon (1 - 3q_0^4). \quad (87)$$

Ażeby układ drgający na częstotliwości ω_2 mógł wzbudzić się na częstotliwości ω_1 wyrażenie (87) musi być większe od zera. Rozwiązujemy je względem q_0^2 traktując μ_0 jako parametr i otrzymujemy warunek na przedział wartości q_0^2 :

$$q_{02}^2 < q_0^2 < q_{01}^2 \quad (88)$$

gdzie q_{01}^2 i q_{02}^2 są pierwiastkami równania kwadratowego

$$6\mu_0^2 \varepsilon q_0^4 - 2\mu_0 q^2 + \mu_0 (1 - 2\mu_0 \varepsilon) = 0 \quad (89)$$

Zgodnie z poprzednimi rozważaniami parametr $4\mu_0 \varepsilon$ może zawierać się w przedziale $1 < 4\mu_0 \varepsilon < 2$. Dla tego przedziału otrzymujemy z wyrażenia (88) odpowiednie wartości q_0^2 .

Wartości q_0^2 pozwalają na określenie z wyrażenia (84) parametrów $R_1 = 8\varepsilon g_1$, i $R_2 = 8\varepsilon g_2$, dla których będzie spełniony warunek samowzbudzenia drgań drugich. Obliczenie przeprowadzono dla kilku wartości $4\mu_0 \varepsilon$ w wymienionym zakresie; wyniki zestawiono w tablicy, przy czym uwzględniono tylko górną granicę q_0^2 odpowiadającą dolnej granicy R_2

1	$4\mu_0 \varepsilon$	1,1	1,4	1,5	1,9
3	q_{0max}^2	· 915	· 765	· 74	· 675
2	R_1	· 99	· 833	· 75	· 19
4	R_{2min}	1,0	· 99	· 99	· 92

Z przeprowadzonych obliczeń wynika, że teoretycznie dla pewnego zakresu wartości par R_1 i R_2 warunek samowzbudzenia drgań drugich może być spełniony, gdyż rozwiązania drgań równoczesnych dla tych par leżą w obszarze drgań stabilnych.

Rozwiązaniami spełniającymi ten warunek będą przecięcia krzywych R_1 z krzywą $R_2 = 0,99$ oraz krzywych R_2 z krzywą $R_1 = 0,99$. Rozwiązaniom tym odpowiada stosunek amplitud stanu ustalonego: $0,3 < q^2 < 0,5$ (tj. $0,55 < q < 0,7$) (patrz wykres na rys. 7).

3. SKŁADOWE O CZĘSTOTLIWOŚCIACH HARMONICZNYCH

Ponieważ dla określenia wpływu harmoniczych na częstotliwość podstawową drgań, konieczna jest znajomość udziału składowych harmoniczych w generowanym widmie częstotliwości, przed wyprowadze-

niem wyrażenia na częstotliwości podstawowe, wyznaczmy zawartość harmonicznych w postaci współczynników $m_{1k} = \frac{\bar{U}_{1k}}{\bar{U}_{11}}$.

3.1. Zawartość trzeciej harmonicznej (m_{13}, m_{23}).

Admitancję całkowitą obwodu dla trzeciej harmonicznej otrzymamy z wyrażenia (25); podstawiając $k=3$ i $\omega=\omega_1$, otrzymamy

$$\frac{1}{\hat{Y}(3\omega_1)} = \frac{1}{G_1} \left[\frac{1}{1 + j \frac{Q_1}{3} \left(3^2 \frac{\omega_1^2}{\omega_{01}^2} - 1 \right)} + \frac{a}{1 + j \frac{Q_2}{3} \left(3^2 \frac{\omega_2^2}{\omega_{02}^2} - 1 \right)} \right]. \quad (90)$$

Biorąc pod uwagę, że $\omega_1^2 \approx \omega_{01}^2$ i $\omega_2^2 \approx \omega_{02}^2$ oraz uwzględniając, że $\frac{8}{3} Q \gg 1$ otrzymamy

$$\frac{1}{\hat{Y}(3\omega_1)} = -j \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{G_1} \left[\frac{1}{Q_1} + \frac{a}{Q_2} \right]. \quad (91)$$

W sposób podobny, uwzględniając, że $\omega_2^2 \approx \omega_{02}^2$ i $\omega_1^2 \approx \omega_{01}^2$ otrzymamy wyrażenie na admitancję $\hat{Y}(3\omega_2)$. Oba wyrażenia będą jednakowe, możemy więc napisać

$$|\hat{Y}(3\omega_1)| \approx |\hat{Y}(3\omega_2)| \approx \frac{8}{3} G_1 \left[\frac{1}{\frac{1}{Q_1} + \frac{a}{Q_2}} \right]. \quad (92)$$

Prąd trzeciej harmonicznej wyznaczamy w sposób podobny jak prąd o częstotliwości podstawowej, tj. przez porównanie współczynników przy $\sin 3\omega_1 t$ i $\cos 3\omega_1 t$ prawej i lewej strony równania (3); po uprzednim podstawieniu wyrażeń (7) i (8) otrzymamy

$$\bar{I}_{13} \cos \beta_{13} = g \bar{U}_{11} \mu \left[\frac{1}{3} - \mu \varepsilon (1 + 4q^2) \right]. \quad (93)$$

$$\bar{I}_{13} \sin \beta_{13} = g \bar{U}_{11} \{ m_{13} [1 + 2\mu (1 + q^2) - 6\mu^2 \varepsilon (1 + 4q^2 + q^4)] + \\ + m_{15} \mu [4\mu \varepsilon (1 - 3q^2 - 3q^4) - 1] \}. \quad (94)$$

Amplitudę wyznaczamy jako sumę geometryczną prądów (93) i (94)

$$\bar{I}_{13} = \sqrt{(\bar{I}_{13} \cos \beta_{13})^2 + (\bar{I}_{13} \sin \beta_{13})^2} \quad (95)$$

Uwzględniając, że stosunek zawartości piątej do trzeciej harmonicznej jest znacznie mniejszy od jedności $\frac{m_5}{m_3} \ll 1$ w przedziale pracy generatora, w którym mogą być wytwarzane jednocześnie dwa drgania stabilne oraz wprowadzając zależności

$$\frac{\bar{I}_{13}}{\bar{U}_{13}} = |\hat{Y}(3\omega_1)| \text{ i } \bar{U}_{11} = \frac{\bar{U}_{13}}{m_{13}} \text{ otrzymamy } m_{13}^2 = \frac{\mu^2 \left[\frac{1}{3} - \mu\varepsilon(1+4q^2) \right]^2}{|\hat{Y}(3\omega_1)|^2 - A^2},$$

gdzie $A = [1 + 2\mu(1+q^2) - 6\mu^2\varepsilon(1+4q^2+q^4)]$.

Ponieważ $A^2 \ll \frac{|\hat{Y}(3\omega_1)|^2}{g^2}$, wyrażenie na m_{13} przyjmie postać

$$m_{13} = \frac{1}{3} \cdot g \cdot \frac{1}{|\hat{Y}(3\omega_1)|} \cdot \mu |1 - 3\mu\varepsilon(1+4q^2)|. \quad (96)$$

Podstawiając na $|\hat{Y}(3\omega_1)|$ wyrażenie (92), otrzymamy wyrażenie na zawartość napięciową składowej trzeciej harmonicznej w postaci

$$m_{13} = \frac{1}{8} \cdot \frac{g}{G_1} \left[\frac{1}{Q_1} + \frac{a}{Q_2} \right] \mu \left| 1 - 3\mu\varepsilon(1+4q^2) \right|. \quad (97)$$

Z wyrażenia (97) wynika, że zawartość 3. harmonicznej napięciowej m_{13} rośnie proporcjonalnie do kwadratu amplitudy drgań o częstotliwości ω_1 tj. do μ . Poza tym m_{13} zależy od kwadratu napięcia drgań o częstotliwości ω_2 tj. od współczynnika q^2 . Dla pewnych wartości amplitud obu drgań tj. dla wartości μ i q^2 określonych zależnością $3\mu\varepsilon(1+4q^2)=1$ zawartość 3. harmonicznej napięciowej równa się zeru tj. $m_{13}=0$.

3.2. Zawartość piątej harmonicznej (m_{15} , m_{25})

Podstawiając $k=5$ i $\omega=\omega_1$ do wyrażenia na admitancję (25) otrzymamy admitancję obwodu dla piątej harmonicznej

$$\frac{1}{Y(5\omega_1)} = \frac{1}{G_1} \left[\frac{1}{1 + j \frac{Q_1}{5} \left(5^2 \frac{\omega_1^2}{\omega_{01}^2} - 1 \right)} + \frac{a}{1 + j \frac{Q_2}{5} \left(5^2 \frac{\omega_1^2}{\omega_{02}^2} - 1 \right)} \right]. \quad (98)$$

Biorąc pod uwagę, że $\omega_1^2 \approx \omega_{01}^2$, $\omega_1^2 \approx \omega_{02}^2$ oraz, że $\frac{24}{5} Q \gg 1$ otrzymamy dla harmonicznych $5\omega_1$ i $5\omega_2$ wyrażenia analogiczne

$$|\hat{Y}(5\omega_1)| = |\hat{Y}(5\omega_2)| = \frac{24}{5} G_1 \left[\frac{1}{\frac{1}{Q_1} + \frac{a}{Q_2}} \right]. \quad (99)$$

Prąd piątej harmonicznej wyznaczamy podobnie jak prąd trzeciej harmonicznej (patrz punkt 3.1). Otrzymamy odpowiednie wyrażenia

$$\bar{I}_{15} \cos \beta_{15} = -g \bar{U}_{11} \left(-\frac{1}{5} \mu^2 \varepsilon \right), \quad (100)$$

$$I_{15} \cdot \sin \beta_{15} = -g \bar{U}_{11} \cdot \mu \{ [4\mu\varepsilon(1+3q^2) - 1] m_{13} + 2[(1+q)^2 + \beta + 3\mu\varepsilon(1+4q^2)] m_{15} \}, \quad (101)$$

stąd

$$\bar{I}_{15} = \sqrt{(\bar{I}_{15} \cos \beta_{15})^2 + (\bar{I}_{15} \sin \beta_{15})^2} = |\bar{I}_{15} \cos \beta_{15}| \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta_{15}}$$

Rozumując podobnie jak w przypadku składowej trzeciej harmonicznej oraz biorąc pod uwagę, że $m_{13} \ll 1$ oraz $m_{15} \ll 1$ możemy napisać, że $\operatorname{tg}^2 \beta_{15} \ll 1$.

Wobec tego można przyjąć, że

$$\bar{I}_{15} \approx |\bar{I}_{15} \cos \beta_{15}| = \frac{1}{5} g \bar{U}_{11} \mu^2 \cdot \varepsilon. \quad (102)$$

Stąd po uwzględnieniu, że $\frac{\bar{I}_{15}}{\bar{U}_{15}} = |\hat{Y}_{15}|$ i $\bar{U}_{15} = m_{15} \cdot \bar{U}_{11}$ oraz po podstawieniu $|\hat{Y}_{15}|$ z wyrażenia (99) otrzymamy wyrażenie na zawartość napięciową składowej piątej harmonicznej w postaci

$$m_{15} = \frac{1}{24} \cdot \frac{g}{G_1} \cdot \left[\frac{1}{Q_1} + \frac{\alpha}{Q_2} \right] \cdot \mu^2 \cdot \varepsilon. \quad (103)$$

Z wyrażenia (103) wynika, że zawartość piątej harmonicznej napięciowej rośnie proporcjonalnie do czwartej potęgi (μ^2) amplitudy drgań o częstotliwości ω_1 i w pierwszym przybliżeniu nie zależy od amplitudy drgań o częstotliwości ω_2 .

W podobny sposób wyprowadzamy wyrażenie na zawartość napięciową trzeciej m_{23} i piątej m_{25} harmonicznych drgań o częstotliwości podstawowej ω_2

$$m_{23} = \frac{1}{8} \cdot \frac{g}{G_1} \left[\frac{1}{Q_1} + \frac{\alpha}{Q_2} \right] \cdot \mu q^2 [1 - 3\mu\varepsilon(4+q^2)], \quad (104)$$

$$m_{25} = \frac{1}{24} \cdot \frac{g}{G_1} \left[\frac{1}{Q_2} + \frac{\alpha}{O_2} \right] \cdot q^4 \mu^2 \cdot \varepsilon. \quad (105)$$

Pamiętając, że $(\mu \cdot q^2)$ jest proporcjonalne do kwadratu amplitudy \bar{U}_{21} drgań o częstotliwości ω_2 , wnioski dotyczące zależności m_{23} i m_{25} od q^2 i (μq^2) będą analogiczne jak dla m_{13} i m_{15} .

4. CZĘSTOTLIWOŚĆ DRGAŃ PODSTAWOWYCH ω_1 i ω_2

Częstotliwość drgań podstawowych ω_1 i ω_2 wytwarzanych jednocześnie wyznaczamy z warunku fazy (46). Podstawiając do równania (46) wyrażenia (16) i (18) otrzymamy

$$B(\omega_1) = -B_{11} = -g \cdot \mu \{ m_{13} [1 - 3\mu\varepsilon(1+4q^2) + m_{15} \cdot \mu \cdot \varepsilon], \quad (106)$$

$$B(\omega_2) = -B_{21} = -g \cdot \mu \cdot q^2 \{ m_{23} [1 - 3\mu\varepsilon(q^2+4) + m_{25} \cdot q^2 \cdot \mu\varepsilon] \}. \quad (107)$$

Uwzględniając zależności (106) i (107) w równaniu (33) i (40) otrzymamy wyrażenie na uchyb częstotliwości uzależniony od zawartości składowych harmoniczných napięcia w postaci

$$\Delta_{11} = -\alpha \frac{\Delta_{12}}{1 + \Delta_{12}^2} \psi(\alpha_1 \beta_1) - \mu \frac{g}{G_1} \{m_{13} [1 - 3(1 + 4q^2) \mu \varepsilon] + m_{15} \mu \varepsilon\} \cdot \quad (108)$$

$$\cdot [(1 + \alpha)^2 + (\alpha \Delta_{11}^I + \Delta_{12})^2] \cdot \psi(\alpha_1 \beta_1) \frac{1}{1 + \Delta_{12}^2};$$

$$\Delta_{22} = -\frac{1}{\alpha} \frac{\Delta_{21}}{1 + \Delta_{21}^2} \psi\left(\frac{1}{\alpha}, \beta_2\right) - \mu q^2 \frac{g}{G_1} \{m_{23} [1 - 3(4 + q^2) \mu \varepsilon] + m_{25} q^2 \mu \varepsilon\} \cdot \quad (109)$$

$$\cdot [(1 + \alpha)^2 + (\alpha \Delta_{22}^I + \Delta_{21})^2] \psi\left(\frac{1}{\alpha}, \beta_2\right) \frac{1}{1 + \Delta_{21}^2}.$$

Podstawiając wyrażenia (97) i (103) do równania (108) otrzymamy

$$\Delta_{11} = -\alpha \frac{\Delta_{12}}{1 + \Delta_{12}^2} \psi(\alpha, \beta_1) - \left(\mu \frac{g}{G_1}\right)^2 \left(\frac{1}{Q_1} + \frac{\alpha}{Q_2}\right) \left\{ \frac{1}{8} [1 - 3\mu \varepsilon (1 + 4q^2)]^2 + \right. \quad (110)$$

$$\left. + \frac{1}{24} (\mu \varepsilon)^2 \right\} [(1 + \alpha)^2 + (\alpha \Delta_{11}^I + \Delta_{12})^2] \psi(\alpha, \beta_1) \frac{1}{1 + \Delta_{12}^2}.$$

Pamiętając, że

$$\Delta_{11} = Q_1 \left(\frac{\omega_1^2}{\omega_{01}^2} - 1 \right),$$

$$\Delta_{12} = Q_2 \left(\frac{\omega_1^2}{\omega_{02}^2} - 1 \right)$$

oraz przyjmując, że wynik nie ulegnie zasadniczej zmianie, jeżeli przyjmemy $\Delta_{12}^2 \approx \Delta_{012}^2 = Q_2 \left[\left(\frac{\omega_{01}}{\omega_{02}} \right)^2 - 1 \right]$ otrzymamy wyrażenie na częstotliwość drgań podstawowych ω_1^2 obwodu pierwszego w postaci

$$\omega_1^2 = \omega_{01}^2 \left\{ \left[\frac{1 + K}{1 + \left(\frac{\omega_{01}}{\omega_{02}} \right)^2 \cdot K} - \left(\mu \frac{g}{G_1} \right)^2 \cdot \frac{1}{Q_1} \left(\frac{1}{Q_1} + \frac{\alpha}{Q_2} \right) \left[\frac{\psi(\alpha, \beta)}{1 + \left(\frac{\omega_{01}}{\omega_{02}} \right)^2 K} \right] \right. \right. \quad (111)$$

$$\left. \left. \frac{1}{1 + \Delta_{012}^2} [(1 + \alpha)^2 + (\alpha \Delta_{11}^I + \Delta_{012})^2] \left\{ \frac{1}{8} [1 - 3\mu \varepsilon (1 + 4q^2)] + \frac{1}{24} (\mu \varepsilon)^2 \right\} \right] \right\}$$

gdzie $K = \alpha \cdot \frac{Q_2}{Q_1} \cdot \frac{\psi(\alpha_1 \beta_1)}{1 + \Delta_{012}^2}.$

Pierwszy składnik wyrażenia w nawiasie określa wpływ obwodu drugiego na częstotliwość drgań obwodu pierwszego. Wskazuje on, że często-

tliwości robocza ω_1 przesuwają się w kierunku częstotliwości obwodu drugiego. Mianowicie, jeżeli pominiemy wpływ harmonicznych, wówczas

$$\omega_1^2 = \omega_{01}^2 \cdot \frac{1+K}{1 + \left(\frac{\omega_{01}}{\omega_{02}}\right)^2 K}.$$

Z wyrażenia wynika, że gdy $\omega_{01} > \omega_{02}$: $\omega_1 < \omega_{01}$ i odwrotnie. To samo dotyczy częstotliwości ω_2 w stosunku do ω_{02} .

Jeżeli uwzględnimy założenie $\Delta_{12}^2 > 10$ oraz, że $Q_1 \approx Q_2$ i $a \approx 1$, czynnik K okaże się znacznie mniejszy od jedności.

Drugi wyraz określa wpływ częstotliwości harmonicznych. Z kształtu współczynników wynika, że wpływ częstotliwości harmonicznych jest większy niż w przypadku jednego obwodu drgań. Składa się na to działanie dwóch czynników: czynnika „kształtu” obwodów: $\left(1 + a \frac{Q_1}{Q_2}\right)$ i czynnika „rozstrojenia” obwodów:

$$[(1+a)^2 + (a\Delta_{11} + \Delta_{12})^2] \cdot \psi(a, \beta) \cdot \frac{1}{1 + \Delta_{12}^2}.$$

Dla $a=1$ i $Q_1=Q_2$ czynnik „kształtu” wynosi ok. 2; przy założeniu $\Delta_{12}^2 \approx 10$ i $a=1$ czynnik „rozstrojenia” obwodów wyniesie ok. 1,6; $\psi(a\beta) \approx 1,1$. Całkowity współczynnik wzrostu wpływu harmonicznych wyniesie ok. 3,0.

Poza współczynnikami specyficznymi dla układu dwóch obwodów rezonansowych połączonych szeregowo, wyrażenie (111) jest zgodne z wynikami otrzymanymi metodą harmonicznych. W szczególności jest analogiczne do wyrażenia na uchyb częstotliwości układu obwodu rezonansowego równoległego z oporem równoległym pobudzanego ujemnym oporem nieliniowym (patrz wyrażenie (7—246) w [8] s. 254).

$$\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1 = - \sum_{k=1}^{\infty} (k^2 - 1) m_k^2.$$

Można to sprawdzić w sposób następujący. Eliminując współczynniki przy m_{13} i m_{15} w równaniu (108) za pomocą (97) i (103) otrzymamy wyrażenie

$$\omega_1^2 = \omega_{01}^2 \left\{ \frac{1+K}{1 + \left(\frac{\omega_{01}}{\omega_{02}}\right)^2 K} - \frac{1}{Q_1} \left(\frac{1}{\frac{1}{Q_1} + \frac{a}{Q_2}} \right) \left[\frac{\psi(a\beta)}{1 + \left(\frac{\omega_{01}}{\omega_{02}}\right)^2 \cdot K} \right] \right. \\ \left. \cdot [(1+a)^2 + (a\Delta_{11} + \Delta_{12})^2] \frac{1}{1 + \Delta_{012}^2} (8m_{13}^2 + 24m_{15}^2) \right\}. \quad (112)$$

Wyraz $(8 m_{13}^2 + 24 m_{15}^2)$ odpowiada wyrażeniu $\sum_{k=1}^{\infty} (k^2 - 1) \cdot m_k^2$ rozwiniętemu dla k nieparzystych, co jest słuszne ze względu na założoną symetryczną charakterystykę elementu pobudzającego ograniczoną do $k=5$.

Współczynnik przy wyrażeniu $(8 m_{13}^2 + 24 m_{15}^2)$ w równaniu (112) możemy wyznaczyć stosując metodę harmoniczných bezpośrednio do układu z rys. 1.

Jeżeli charakterystyka napięciowo-prądowa elementu pobudzającego jest bezpętlowa wówczas zostaje spełniony warunek

$$\oint u di = \oint i du = 0. \quad (113)$$

Warunek ten musi być spełniony dla krzywej zamkniętej opisanej przez chwilowy punkt roboczy w czasie pełnego cyklu drgań. Ponieważ w układzie występują dwa drgania niezależne, całkowanie należy przeprowadzić w czasie, po którym drgania wykonają pełną liczbę cykli. Ponieważ przyjęliśmy, że $\frac{p}{\omega_1} = \frac{r}{\omega_2}$ warunek (113) będzie spełniony dla

$$p \oint i(\omega_1) du(\omega_1) + r \oint i(\omega_2) du(\omega_2) = 0.$$

Wyrażenie to po scałkowaniu da nam znaną zależność [8]

$$p \sum_{k=1}^{\infty} k \operatorname{Im} \{ \hat{U}_k \check{I}_k \} + r \sum_{l=1}^{\infty} l \operatorname{Im} \{ \hat{U}_l \check{I}_l \} = 0. \quad (114)$$

W rozważanym przypadku drgań o częstotliwościach nieharmonicznych wzajemnego oddziaływania energetycznego obu układów nie ma i wobec tego równania (114) może być spełnione tylko wtedy jeżeli oba składniki będą jednocześnie równe zero. Otrzymujemy dwa równania

$$p \sum_{k=1}^{\infty} k \operatorname{Im} \{ \hat{U}_k \check{I}_k \} = 0, \quad (115a)$$

$$r \sum_{l=1}^{\infty} l \operatorname{Im} \{ \hat{U}_l \check{I}_l \} = 0. \quad (115b)$$

Z równań tych wyznaczymy częstotliwości ω_1 i ω_2 obu drgań. Wyznaczamy częstotliwość ω_1 z równania (115a). Wykorzystując zależność: $\hat{I}_k = \hat{Y}_k \hat{U}_k$ i wprowadzając współczynniki zawartości harmoniczných napięciowych m_{1k} , otrzymamy

$$\operatorname{Im} \sum_{k=1}^{\infty} k \{ \hat{Y}_k \} m_{1k}^2 = 0.$$

Wydzielamy składnik $m_{11}=1$

$$\text{Im} \{ \hat{Y}_{11} \} = -\text{Im} \sum_{k=2}^{\infty} k \{ \hat{Y}_k \} m_{1k}^2,$$

co z kolei można napisać w postaci

$$| \hat{Y}_{11} |_{ur} = - \sum_{k=2}^{\infty} k | \hat{Y}_{1k} |_{ur} m_{1k}^2. \quad (116)$$

Podstawiamy na $|Y_{11}|_{ur}$ wyrażenie (30) oraz na $|Y_{1k}|_{ur}$ wyrażenie (25) uproszczone do postaci

$$| \hat{Y}_{1k} |_{ur} = | \hat{Y}_{1k} |_{k>2} = \frac{k^2-1}{k} \frac{1}{\left(\frac{1}{Q_1} + \frac{a}{Q_2} \right)} \cdot G_1,$$

stąd

$$B(\omega_1) = -G_1 \sum_{k=2}^{\infty} k \cdot \frac{k^2-1}{k} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{Q_1} + \frac{a}{Q_2} \right)}. \quad (117)$$

Wprowadzając prawą stronę równania (30) zamiast $B(\omega_1)$ oraz dzieląc przez G_1 otrzymamy

$$\frac{\Delta_{11}(1+\Delta_{12}^2) + a\Delta_{12}(1+\Delta_{11}^2)}{(1+a)^2 + (a\Delta_{11} + \Delta_{12})^2} = - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(k^2-1)m_{1k}^2}{\frac{1}{Q_1} + \frac{a}{Q_2}}. \quad (118)$$

Przyjmując, że $\Delta_{11}^2 \ll 1$ napiszemy (119)

$$\Delta_{11} = - \frac{a\Delta_{12}}{1+\Delta_{12}^2} - \frac{(1+a)^2 + (a\Delta_{11} + \Delta_{12})^2}{1+\Delta_{12}^2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{Q_1} + \frac{a}{Q_2} \right)} \sum_{k=2}^{\infty} (k^2-1)m_{1k}^2. \quad (120)$$

Stąd po dalszym przekształceniu wyrażenia (120) otrzymamy wyrażenie (112). W wyrażeniu (120) nie występuje współczynnik $\psi(a, \beta)$, co wynika z założenia (119), przy którym $\psi(a, \beta) \approx 1$.

Politechnika Gdańska

WYKAZ LITERATURY

1. Andronow A. A. i Witt A. A.: *K matematycznej teorii autokolebatielnych system s dwumia stiepieniami swobody*. Żur. Tech. Fiz. 1934 nr 1.
 2. Andronow A. A., Chaikin C. E.: *Theory of oscillations*. rozdz. IX Princeton University Press 1949.
- Andronow A. A., Witt A. A., Chaikin C. B.: *Teoria kolebanij* rozdz. IX Gos. Izd. Fiz. Mat. Lit. Moskwa 1959.

3. Bułgakow E. V.: O primienienii metoda w.d. Pola k pseudoliniejnym sistie-mam s mnogimi stiepieniami swobody. Prikladnaja Mat. i Mech. t. VI wyd. 6 s. 5 395—409 1942.
4. Dishman M. I., Edson W. A.: Simultaneous asynchronous oscillations in class C-amplifiers Proc. IRE May 1958 s. 895.
5. Edson W. A.: Vacuum tube oscillators. John Wiley a. Sons Inc. New York 1953 s. 433.
6. Feist W.: Über die gleichzeitige Erzeugung zweier Schwingungen in einem Oszillator und die Konstanz der Differenzfrequenz Nachrichten Z. Vol. 5 1957 s. s. 215—222.
7. Groszkowski J.: O indukcyjności łuku i pojemności dynatronu Ar. Elek-trot. t. III z. 1 s. 3.
8. Groszkowski J.: Wytwarzanie drgań elektrycznych PWT Warszawa 1958.
9. Kryłow i Bogolubow: Introduction to nonlinear mechanics. Princeton University Press 1947.
10. Lattmann M. u. Salinger H.: Über die gleichzeitige Erzeugung von zwei Frequenzen in einer Röhre. ENT II 1954 s. 384—388.
11. Magazanik A. A.: K kaczestwiennoj teorii asinchronnych režimow w awto-kolebatielnych sistiemach s dwumia stiepieniami swobody. Radiotiehnika i Elektronika T IV z. 7 1959.
12. Magazanik A. A.: Niekotoryje osobienosti pierechodnych processow w asinchronnom awtogienieratore s dwumia stiepieniami swobody pri silno atliczajuszczichsia koefficientach zatuchania sobstwiennych kolebanij. Radio-tiehnika i Elektronika T. IV z 8 1959, s. s. 1359—1367.
13. Magazanik A. A.: Ob asinchronnych dwuchczastotnych režimach w awto-gienieratorach s dwumia stiepieniami swobody. Radiotiehnika i Elektronika T. II z. 10 1957, s. 1331.
14. Mögel H.: Über die gleichzeitige Erregung zweier Schwingungen in einer Dreielektrodenröhre. Jahrbuch f. Drahtl. T. u T. 1928, s. s. 72—83.
15. B. v. der Pol: An oscillation hysteresis in a triode generator with two degress of freedom. Phil. Mag., v. 43, April 1922 s. s. 700—719.
16. Skinner L.: Criteria for stability in circuits containing nonlinear resistance. Ph. D. Dissertation Univ. of Illinois, Urbaua, III 1948. (praca nie opublikowana).
17. Sommer J.: Die Gleichzeitige Erzeugung mehrerer Frequenzen in einer Röhre. TFT 29 1940 t. 10.
18. Schaffner J.: Simultaneous oscillations in oscillators. IRE Trans. on Circuit Theory v. 1. June 1954 s. s. 2—8.
19. Tieodorczyk K. F.: Tomsonowskiije awtokolebatielnyje sistiemy s dwumia stiepieniami swobody. Radiotiehnika 1946 nr 3,4.
- 19a. Tieodorczyk K. F.: Awtokolebatiennyje sistiemy Moskwa 1952, s. 89.
20. Utkin G. M.: Ustowija ustojczivosti odnowremiennych kolebanij w mnogo-konturnych awtokolebatielnych sistiemach. Radiotiehnika i Elektronika T. IV z. 12 1959. s. s. 1993—2003.
21. Utkin G. M.: Awtokolebatielnyje sistiemy s dwumia stiepieniami swobody pri kratnych czastotach. Radiotiehnika nr 10 1956.
22. Utkin G. M.: Wzaimnaja sinchronizacija awtogienieratorow na kratnych cza-stotach. Radiotiehnika i Elektronika T. II z. 1 1957.
23. Utkin G. M.: Odnowremiennyje kolebanija dwuch czastot w awtogieniera-tore s awtosmieszczeniem. Radiotiehnika T. 12 z. 4, 1957.

24. Abd El Samie Mostafa: *Simultaneous pulled oscillators in a triode oscillator incorporating two oscillatory-circuits* Trans. A.I.E.E. Part I vol. 76, s. s. 120—127, 1957.
25. Rouche N.: *Study of the synchronous regime of two coupled oscillators*. Bull. Sci. Assoc. Ingen. Montefiore v. 69, nr 1, 1953.
26. Kozłowski K. N.: *Bigarmoniczne kolebaniya w dwuchkonturnych awto-generatorach*. Naucznyje doklady wyższej szkoły, Radiotekhnika i Elektronika Nr 1, 1959.

УСЛОВИЯ ОДНОВРЕМЕННОГО ГЕНЕРИРОВАНИЯ СТАБИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ С ДВУМЯ НЕГАРМОНИЧЕСКИМИ ЧАСТОТАМИ

В появившихся до этого времени публикациях, относящихся к одновременному генерированию стабильных колебаний в системах с двумя или с большим количеством степеней свободы, обсуждался прежде всего вопрос общего решения для амплитуд колебаний или для взаимного их отношения и вопрос обозначения области стабильности решений установившегося состояния.

В рассуждениях принималась нелинейная характеристика возбуждающего элемента, имеющего в качестве нагрузки линейное или нелинейное сопротивление. При решении вопроса авторы исходили из системы нелинейных дифференциальных уравнений, которые решались методом Б. Ван-дер Поля методом Крылова и Боголюбова. Область стабильных решений была обозначается методом возмущения состояния равновесия.

Настоящая работа имела целью выяснение не принимаемых во внимание в прежних работах дальнейших зависимостей в системе с двумя степенями свободы при употреблении другого метода.

Анализ проблемы основывался на так называемом техническом методе, указанном Я. Грошковским [1], [2]. Принято симметрическую характеристику возбуждающего элемента, выраженную степенным рядом пятой степени, в котором коэффициенты при членах третьей и пятой степени имеют разные знаки. Члены четных степеней не принимаются во внимание, потому что в первом приближении они не влияют на амплитуду и стабильность колебаний.

В результате проведенного анализа получено решение для амплитуды одновременных колебаний в зависимости от расстройки и параметров контуров а также определена область стабильных решений. Получено более точное выражение для частоты колебаний, учитывающее взаимное влияние гармонических частот. Определены гармонические составляющие обоих колебаний. Выяснена зависимость отношения амплитуд обоих одновременных колебаний от неравномерности нагрузки контуров и определено количественное влияние неравномерности нагрузки на стабильность одновременных колебаний. Показано, что при генерировании одновременных колебаний условия подбора нагрузки являются критическими и что допустимый интервал неравномерности нагрузки ограничен.

Выяснена также зависимость возможности генерирования одновременных стабильных колебаний от формы характеристики возбуждающего элемента, указывая влияние отношения коэффициентов при членах 3-ей и 5-ой степени на допустимый интервал неравномерности нагрузки. Констатируется, что для некоторых совокупностей параметров контуров, когда система осциллирует на одной частоте в условиях „твердого возбуждения” теоретически существует

возможность одновременного самовозбуждения колебаний на второй частоте.

Область стабильности одновременных колебаний определена методом обозначения области существования минимум потенциальной энергии системы, получая полное совпадение с результатами других авторов, применявший метод „возмущения состояния равновесия”. Выражение, определяющее влияние гармонических частот на основную частоту, сравнивалось с выражением полученным при помощи метода равновесия энергии мнимых [2], [3] гармонических колебаний и получено полное совпадение обоих выражений.

Полученные результаты подчеркивают правильность и эффективность примененного для анализа технического метода, потому что амплитуды основных колебаний были обозначены не с меньшей точностью чем при помощи других методов (Ван-дер Поля, Крыдова, Боголюбова), а непосредственно полученное более точное выражение для частоты колебаний и спектра гармонических колебаний не было до этого времени получено другими методами.

CONDITIONS OF SIMULTANEOUS GENERATION OF STEADY-STATE OSCILLATIONS WITH UNHARMONIC FREQUENCIES

All the papers yet published on the subject of the simultaneous generation of steady-state oscillations in a network with two or more degrees of freedom have been primarily concerned with general solution of the amplitudes of oscillations or their relationship, and determining the regions of stability of steady-state solutions. In all considerations the nonlinear characteristic of the generating element charged either with linear or nonlinear resistance have been accepted. The authors involved in solution of the problem applied a set of nonlinear differential equations resolving them either by Van der Pol or Krylov-Bogolubov methods. The method of the disturbed state of balance has been used to determine the region of stability in the solutions. The object of this work is to throw the light on further relations in a network with two degrees of freedom which up to now have been omitted in publications. The so-called technical method suggested by Groszkowski (1), (2), is applied to the analysis of the problem.

The characteristic of the generating element, assumed as being symmetric is expressed by a power series of the fifth degree with the coefficients of different signs. The even terms are omitted since they do not affect neither the amplitude nor the oscillation stability at the terms of the third and fifth degree in the first approximation.

Analysis is then carried out which leads to the solution of the amplitudes of simultaneous oscillations being dependent on the detuning and the circuit parameters, and to determining of a region of steady-state solutions. In fact more accurate expression for the frequency of the oscillations is obtained since it reflects the interdependence of harmonic frequencies. Harmonic components of both oscillations are determined. The dependence of the ratio of amplitudes of both simultaneous oscillations with respect to the irregularity of circuit loading is discussed and the influence the irregularity exerts on the stability of simultaneous oscillations is defined.

The interdependence of the condition of simultaneous generation of steady-state oscillations and the shape of characteristic of the generating element is explained, demonstrating the influence the ratio of coefficients at the terms of the third and the fifth degree exerts on the permissible range of the loading irregularity. It has

been noticed that when the network oscillates with one frequency there exists, theoretically for certain sets of circuit parameters a possibility of simultaneous self-generation of oscillations with second frequency in the conditions of „hard generation”.

Actually the method serving for the determination of the region of the existence of minimum potential energy in a network has been used to define the stability region. The results obtained are in full agreement with data obtained by other authors, who used the method of the disturbed state of balance. The expression defining the influence harmonics exercise on the basic frequency if compared with the expression derived from the balance method of imaginary energy of harmonics (2), (3) proved to be in full agreement with each other. The obtained results emphasize the correctness and the efficiency of the technical method used to carry out the analysis; the amplitudes of the basic oscillations proved to be determined with an accuracy not smaller than by other methods (Van der Pol and Krylov-Bogolubov) and the expression for the frequency of oscillations and the spectrum of harmonics obtained directly is more accurate than those obtained by other methods.

621.318.13

A. GÓRAL

Dynamiczne właściwości ferromagnetyków o prostokątnej pętli histerezy

Rękopis dostarczono 21. 5. 1960.

W pracy rozważa się problem jednoznaczności dynamicznych charakterystyk ferromagnetyków o prostokątnej pętli histerezy dla warunków impulsowych. Przedstawiono nową metodę określania dynamicznych właściwości ferromagnetyków o prostokątnej pętli histerezy głównie w aspekcie ich zastosowań do konstrukcji samonasycanych wzmacniaczy magnetycznych. Przedstawiono wyniki odnośnych badań eksperymentalnych uzyskane za pomocą stosunkowo prostej metodyki pomiarowej. Poczyniono próbę interpretacji fizycznej zależności doświadczalnych na gruncie teorii domen ferromagnetycznych. Uogólniono pojęcie równoważnej oporności uzwojonego rdzenia o prostokątnej pętli w warunkach magnesowania impulsowego.

1. WSTĘP

Ferromagnetyki o prostokątnej pętli histerezy cechuje szybki rozwój, który dał się zaobserwować szczególnie wyraźnie na przestrzeni ostatnich dziesięciu lat i doprowadził do opanowania w skali technicznej produkcji materiałów o dużym znaczeniu użytkowym. Materiały te, tak metaliczne jak i półprzewodnikowe, stosowane są do celów konstrukcji nieliniowych elementów magnetycznych o działaniu ciągłym jak również o charakterystykach przekaźnikowych, przy czym częstotliwości zasilania zawierają się w bardzo szerokim pasmie począwszy od częstotliwości sieciowych a skończywszy na częstotliwościach zakresu ultrakrótkofalowego (rzędu setek megaherców).

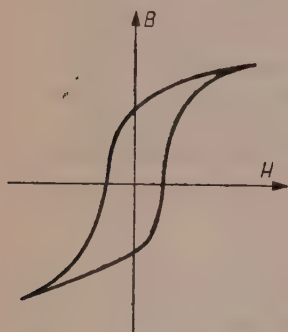
Równoległe z opracowaniami technologicznymi zachodzi rozwój poglądów dotyczących istoty fizycznej struktury ferromagnetyków o prostokątnej pętli i specyfiki ich procesów przemagnesowywania w polach wielkiej częstotliwości [4], [5], [7], [15], [17]. Dużo uwagi poświęca się również zagadnieniu własności dynamicznych uzwojonego rdzenia o prostokątnej pętli magnesowania, jako elementu obwodu elektrycznego. W tym ostatnim aspekcie większość prac dotyczy problemu wpływu dynamicznych charakterystyk materiału rdzenia na własności wzmacniaczy

magnetycznych z wewnętrznym sprzężeniem zwrotnym, rozumianych w jak najszerszym sensie.

W pracy niniejszej rozważany jest problem jednoznacznych charakterystyk dynamicznych ferromagnetyków o prostokątnej pętli histerezy w aspekcie zastosowań ich jako materiałów na rdzenie elementów magnetycznych, pracujących w warunkach magnesowania impulsowego. Na podstawie uzyskanych wyników eksperymentalnych wyciągnięte zostają wnioski ogólne, dotyczące modelu elektrycznego uzwojonego rdzenia o prostokątnej pętli magnesowania.

2. ZAKRES STOSOWALNOŚCI DYNAMICZNYCH CHARAKTERYSTYK FERROMAGNETYKÓW W UJĘCIU „KLASYCZNYM”

Charakterystyki magnesowania realnych ferromagnetyków odznaczają się nieliniową zależnością pomiędzy indukcją magnetyczną a natężeniem pola magnetycznego (rys. 1). Dla celów analizy obwodów elektrycznych, zawierających indukcyjności z rdzeniami ferromagnetycznymi wprowadza się formalne aproksymacje zależności pomiędzy indukcją a natężeniem pola magnetycznego, na ogół bez wnikania w fizyczną treść opisywanego analitycznie procesu magnesowania.



Rys. 1. Statyczna pętla histerezy materiału magnetycznie miękkiego.

Nie wchodząc w szczegóły różnorodnych aproksymacji, omówimy poniżej w skróceniu niektóre ważniejsze metody opisu analitycznego dynamicznych charakterystyk ferromagnetyków w założeniu istnienia jednoznacznych zależności pomiędzy indukcją magnetyczną a natężeniem pola magnesującego. Należy tu wyraźnie rozróżniać pomiędzy pojęciem pola magnetycznego i pola magnesującego. Pierwsze bowiem

dotyczy wektora natężenia pola wewnątrz masy magnetyka w rozpatrywanym punkcie, drugie zaś jest bezpośrednio związane z prądem magnesującym zależnością

$$H = \frac{0,4 \pi I w}{l}, \quad (1)$$

gdzie

H — pole magnesujące (Oe),

I — prąd A płynący przez uzwojenie o liczbie zwojów w ,

l — średnia długość drogi magnetycznej w rdzeniu zamkniętym lub „nieskończenie długim” (cm).

W dalszym ciągu, mówiąc o polu magnetycznym magnesującym, będziemy mieli na myśli właśnie wielkość określoną powyżej.

Analogicznie, mówiąc o indukcji magnetycznej, będziemy mieli na myśli średnią po przekroju rdzenia wartość indukcji, określoną zależnością

$$B = \frac{\Phi}{q} = B_0 + \frac{10^8}{wq} \int_0^{\tau} u dt \quad (2)$$

gdzie

- B — średnia wartość indukcji w procesie magnesowania (Gs),
- B_0 — początkowa wartość indukcji przed rozpoczęciem magnesowania,
- τ — czas trwania procesu magnesowania (sek),
- q — przekrój rdzenia w cm^2 ,
- u — wartość chwilowa napięcia na dławiku w (V),
- w — liczba zwojów,
- Φ — strumień magnetyczny.

Zasadniczym parametrem charakteryzującym własności dynamiczne ferromagnetyka w polach słabych, okresowo zmiennych jest przenikalność zespolona materiału, określona zależnością [3], [24]:

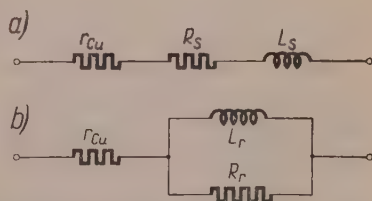
$$\hat{\mu} = \frac{\hat{B}}{H} = \mu_1 - j\mu_2, \quad (3)$$

gdzie

- \hat{B}, \hat{H} — odpowiednio zespolone wielkości pierwszych harmoniczych indukcji i pola magnetycznego,
- μ_1 — składowa rzeczywista przenikalności zespolonej μ_2 , zwana niekiedy składową indukcyjną, będąca współczynnikiem proporcjonalności w znanym wyrażeniu na indukcyjność w zastępczym obwodzie szeregowym RL (rys. 2a),
- μ_2 — składowa urojona przenikalności zwana składową strat, uzależniona jest od niej wielkość równoważnej, szeregowej oporności strat rdzenia (rys. 2a).

Przenikalność zespolona, określona zależnością (3), odnosi się do zastępczego liniowego układu szeregowego. Nieco rzadziej stosuje się przenikalność zespoloną tzw. równoległą odnoszącą się do zastępczego obwodu równoległego (rys. 2b). Zależności pomiędzy dwoma rodzajami przenikalności wynikają z ogólnych zależności pomiędzy układami elektrycznymi równoważnymi i nie będą tutaj dyskutowane.

Istnieje wiele metod pomiaru przenikalności zespolonej [25], wszystkie jednak

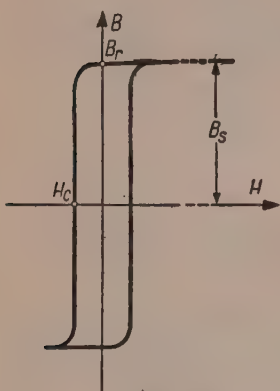


Rys. 2. Zastępcze układy elektryczne, odpowiadające uzwojeniu rdzeniowi ferromagnetycznemu, r_{cu} — oporność rzeczywista uzwojenia.

a) układ zastępczy szeregowy,
b) układ zastępczy równoległy.

odznaczają się selektywnością, tzn. pomiar w konkretnym układzie pomiarowym odnosi się do zależności pomiędzy pierwszą harmoniczną napięcia i prądu. Zastosowanie koncepcji przenikalności zespolonej do celów praktycznych daje szczególnie dobre rezultaty w odniesieniu do rdzeni pracujących w zakresie pól słabych. Okazuje się jednak w praktyce, że parametry materiału magnetycznego dla pierwszej harmonicznej napięcia i prądu magnesującego odzwierciedlają dostatecznie dokładnie właściwości materiału w szerokim zakresie pól, przekraczającym znacznie pola „słabe” [1], [16].

Zagadnienie charakterystyk dynamicznych ferromagnetyków w warunkach magnesowania polami impulsowymi wymaga odmiennego podejścia. Koncepcja przenikalności zespolonej znajduje tu jednak [18] zastosowanie z pewnymi ograniczeniami, wynikającymi z zależności częstotliwościowej składowych μ_1, μ_2 , uwarunkowanej



Rys. 3. Przykładowa prostokątna pętla histerezy ferromagnetyka.

tak wpływami natury elektrodynamicznej (prądy wirowe) jak i specyfiką fizyczną procesów magnesowania w polach szybkozmiennych. Ta ostatnia klasa wpływów ma znaczenie szczególnie duże w przypadku tworzyw magnetycznych niemetalicznych (ferrytów), dla których ze względu na małą na ogół wartość przewodności właściwej wpływ prądów wirowych jest nieznaczny. Uwagi powyższe dotyczą charakterystyk materiałów, które pomimo swojej nieliniowości dadzą się wyrazić z dostatecznie dużą dokładnością za pomocą aproksymacji pętlą eliptyczną, odpowiadającą koncepcji przenikalności zespolonej jak i warunkom pomiaru w odniesieniu do podstawowych harmonicznych prądu i napięcia.

Zupełnie odrębny problem przedstawia zagadnienie dynamicznych właściwości ferromagnetyków o prostokątnej pętli magnesowania (rys. 3), tak że względu na wyjątkowo silną nieliniowość zależności pomiędzy indukcją magnetyczną a natężeniem pola magnesującego, jak i z uwagi na specyfikę wielu zastosowań tych materiałów. Terminem „ferromagnetyki o prostokątnej pętli histerezy” zwykło się określać materiały magnetycznie miękkie, dla których indukcja nasycenia B_s jest niewiele większa od pozostałości magnetycznej B_r . Miarą prostokątności statycznej pętli histerezy (zdjętej np. metodą balistyczną) jest tzw. współczynnik prostokątności

$$p = \frac{B_r}{B_s}. \quad (4)$$

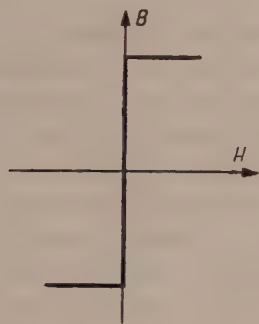
W praktyce indukcję nasycenia B_s utożsamia się z indukcją przy polu

magnesującym odpowiednio dużym (zależnie od rodzaju materiału może to być pole równe 1 Oe, 10 Oe, 50 Oe). Oprócz dużego współczynnika prostokątności ($p > 0,85$) materiały o prostokątnej pętli cechuje duża stromość zboczy krzywej magnesowania. Przenikalność różniczkowa pętli statycznej

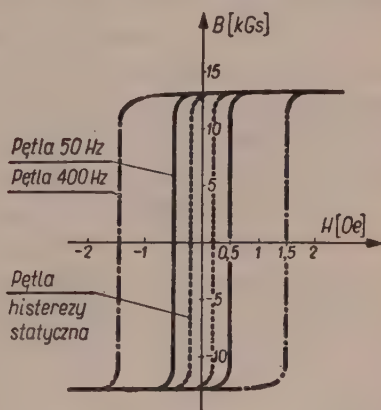
$$\mu_d = \frac{dB}{dH} \quad (5)$$

osiąga w swoim szczytowym punkcie ($H = H_c$) wartości rzędu 10^6Gs/Oe .

Duży stosunek indukcji nasycenia B_s do natężenia pola koercji H_c współczesnych ferromagnetyków o prostokątnej pętli histerezy umożliwia aproksymację charakterystyki magnesowania za pomocą linii łamanej (rys. 4). Aproksymacja tego rodzaju znalazła szerokie zastosowanie w analizie wzmacniaczy magnetycznych bez sprzężenia zwrotnego wewnętrznego, ułatwiając zrozumienie ich mechanizmu działania i opis podstawowych własności [6], [12], [14], [16], [26]. W układach jednak wzmacniaczy z wewnętrznym sprzężeniem zwrotnym występują silne wpływy kształtu dynamicznej pętli magnesowania na właściwości układu. Na kształt dynamicznej pętli ferromagnetyka o prostokątnej statycznej pętli



Rys. 4. Wyidealizowana charakterystyka magnesowania materiału o prostokątnej pętli.

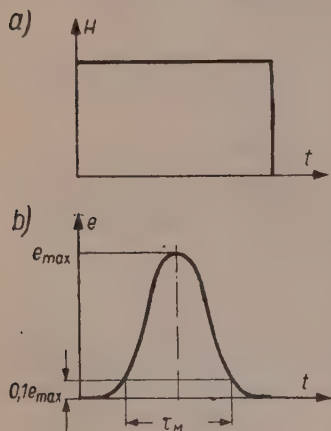


Rys. 5. Wpływ częstotliwości pola magnesującego na szerokość pętli magnesowania.

histerezy mają wpływ zarówno parametry obwodu elektrycznego magnesującego (którego część składową stanowi uzwojony rdzeń ferromagnetyczny), jak i czynniki uwarunkowane strukturą fizyczną rozpatrywanej kształtki ferromagnetyka. Na rys. 5 przedstawiono przykładowo wpływ zmian częstotliwości źródła sinusoidalnego prądu magnesującego na szerokość pętli dynamicznej magnesowania jednego z ferromagnetyków o prostokątnej pętli. Przytoczona charakterystyka dotyczy warunków magnesowania prądem sinusoidalnym. W przypadku np. warunków ma-

gnesowania sinusoidalnym napięciem, kształt pętli magnesowania ulega zmianie, często jednak optycznie słabo zauważalnej wobec małej dokładności powszechnie stosowanych metod oscyloskopowych zdejmowania pętli dynamicznej. Nawet jednakże w przypadku wyraźnie dostrzegalnych zmian w obrazie charakterystyki magnesowania rdzenia w różnych warunkach powstają duże trudności, jeśli chodzi o skorelowanie przebiegu dynamicznej pętli magnesowania z właściwościami układu roboczego, w którym dany rdzeń został zastosowany. Szereg autorów (np. [11], [13], [20]) doszło do zgodnego wniosku, że nie należy liczyć się z możliwościami określenia jednoznacznych zależności pomiędzy przebiegiem dynamicznej pętli magnesowania rdzenia a charakterystykami sterowania wzmacniacza magnetycznego z wewnętrznym sprzężeniem zwrotnym. Okoliczność ta spowodowała pojawienie się koncepcji prymitywnego modelowania charakterystyki magnesowania rdzenia przez pomiar jego w warunkach identycznych do tych, jakie panują w konkretnym układzie roboczym wzmacniacza magnetycznego [20]. Metoda ta rozpowszechniła się szeroko np. w praktyce produkcyjnej w USA i zalecana jest przez AIEE Standard Nr 432.

Ostatnim wreszcie momentem, na który należy zwrócić uwagę, jest chyba najważniejsza kwestia jednoznaczności zależności pomiędzy chwilową wartością indukcji magnetycznej w rdzeniu a natężeniem pola magnesującego impulsowego. Prosty eksperyment, polegający na podaniu rdzenia kolejnemu oddziaływaniu prostokątnych impulsów pola magnesującego rdzeń na przemian do skrajnych stanów magnesowania ($+B_s - B_s$) i następnie obserwacja indukowanego w trakcie prze-



Rys. 6. Przebiegi czasowe a) pola magnesującego i b) napięcia indukowanego w procesie magnesowania ferromagnetyka o prostokątnej pętli.

magnesowywania napięcia pozwala na stwierdzenie, że kształt impulsu napięcia odbiega zasadniczo od kształtu prostokątnego. W przypadku materiałów, dla których w danych warunkach magnesowania nie są dominujące wpływy natury elektrodynamicznej (wpływy prądów wirowych) nie można mówić w ogóle o jednoznacznej zależności pomiędzy indukcją i polem, a ściśle pomiędzy ich chwilowymi wartościami w procesie magnesowania. Poglądowo przekonuje o tym kształt oscylogramu przedstawionego na rys. 6, dotyczącego przebiegów czasowych (w tej samej skali czasowej) prostokątnego impulsu prądu magnesującego i indukowanego napięcia. Stałej wartości pola odpowiada tu zmienny w czasie przebieg napięcia indukowanego,

a z kształtu jego widoczne jest, że proces magnesowania rozpoczyna się z pewnym opóźnieniem w stosunku do czoła impulsu pola magnesującego. Niejednoznaczność zależności pomiędzy polem a napięciem indukowanym dotyczy oczywiście w równym stopniu zależności pomiędzy polem a indukcją magnetyczną, będącą całką indukowanego w rdzeniu napięcia względem czasu t .

3. PRZEDMIOT BADAŃ I METODYKA POMIARÓW

Wyniki badań doświadczalnych pozwoliły stosunkowo wcześniej na określenie pewnych właściwości materiałów o prostokątnej pętli histerezy w warunkach magnesowania polami impulsowymi. Ustalono między innymi, że czas przemagnesowania rdzenia od jednej krańcowej wartości indukcji do drugiej za pomocą prostokątnego impulsu pola jest odwrotnie proporcjonalny do różnicy pomiędzy natężeniem pola magnesującego a pewnym krytycznym natężeniem pola H_0 , po przekroczeniu wartości którego zaczynają zachodzić w masie magnesowanego materiału nieodwracalne procesy magnesowania

$$\tau_M = \frac{S}{H_M - H_0}, \quad (6)$$

gdzie

τ_M — czas przemagnesowania (zwany najczęściej czasem przełączania) mierzony na ekranie oscyloskopu pomiędzy punktami na krzywej napięcia indukowanego impulsem prostokątnym pola, odpowiadającym 0,1 wartości szczytowej napięcia (rys. 6).

H_M — amplituda pola magnesującego,

H_0 — krytyczne natężenie pola, powyżej wartości którego rozpoczynają się zmiany nieodwracalne stanu magnesowania materiału,

S — współczynnik proporcjonalności, zwany na ogół współczynnikiem przełączania.

W pierwszej fazie rozwoju teorii procesu impulsowego magnesowania polikrystalicznych ferromagnetyków o prostokątnej pętli magnesowania współczynnik S traktowany był jako stała fizyczna [4], [15]. W świetle współczesnych jednak poglądów [7], [10] współczynnik przełączania można traktować jako stałą w ograniczonych zakresach pól magnesujących odpowiednio do dominującego mechanizmu magnesowania. Nie wnikając chwilowo w sens fizyczny współczynnika S zauważyć należy, że odpowiada on elektrycznie kulombozwojom, przypadającym na jednostkę długości średniej drogi magnetycznej w rdzeniu. W dalszym ciągu współczynnik S będziemy nazywali ładunkiem elektrycznym właściwym pełnego przemagnesowania. Zostanie wykazane eksperymentalnie, że w zakresie stosunkowo niewielkich pól wielkość ta nie jest

stałą (nawet w ograniczonym sensie), lecz jest funkcją czasu, w którym zachodzi proces magnesowania. Wprowadzimy dodatkową wielkość s , którą nazwiemy ładunkiem elektrycznym właściwym przemagnesowania cząstkowego lub — w skróceniu — ładunkiem magnesującym. Określimy ją za pomocą zależności

$$s = \int_{\tau_0}^{\tau} [H(t) - H_0] dt, \quad (7)$$

gdzie

τ — czas zakończenia procesu magnesowania cząstkowego rdzenia,
 τ_0 — czas, w którym pole magnesujące $H(t)$ osiąga wartość H_0 (por. zależność (6)).

W warunkach magnesowania impulsami prostokątnymi pola ferromagnetyków o dużej prostokątności czas τ_0 jest do pominięcia i można przyjąć w przybliżeniu $\tau_0 \approx 0$. Wyrażenie (7) nosi charakter ogólny; całka znajdująca się po prawej stronie (7) będzie równa współczynnikowi przełączania S , jeśli jako górną granicę całkowania podstawimy τ_M (czas pełnego przemagnesowania).

Interesował nas będzie w dalszym ciągu również przebieg zależności

$$\Delta B = \varphi \left\{ \int_0^{\tau} [H(t) - H_0] dt \right\} = \varphi(s) \quad (8)$$

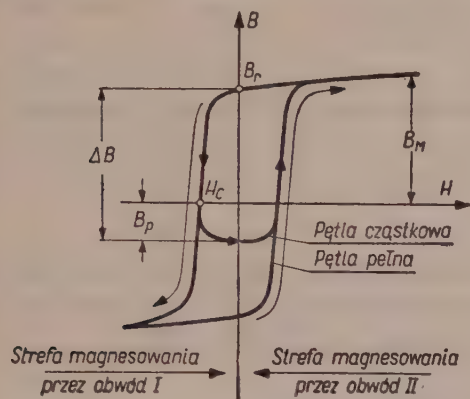
gdzie

τ — parametr

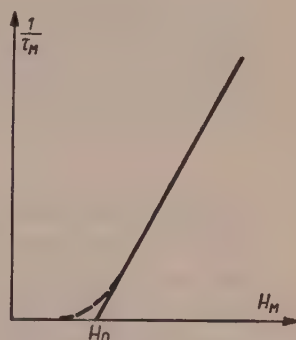
ΔB — przyrost indukcji w rdzeniu, powstały pod wpływem działania ładunku właściwego s w czasie τ .

Z określenia ładunku magnesującego s wynika, że rozpatrywana zależność dotyczyła będzie wyłącznie przyrostów indukcji zachodzących na skutek nieodwracalnych procesów magnesowania, dominujących w przypadku magnetyków o prostokątnej pętli histerezy. Ponadto badane będą w zasadzie przyrosty indukcji poczynając od wyjściowego stanu magnesowania, odpowiadającego pozostałości magnetycznej F_r (rys. 7). W znanych autorowi pracach nie badano przebiegu zależności (8); wyjątek stanowi bardzo interesująca praca [17], badania jednak przeprowadzone w jej ramach dotyczyły warunków magnesowania, w których współczynnik S traktowany może być jako stała przy założeniu dominującego mechanizmu magnesowania za pomocą przesunięć ścian domonowych. Z tego powodu krytyczne pole H_0 w sensie przyjętym w niniejszej pracy nie jest równoznaczne ściśle z polem H_0 , figurującym w zależności (6) i wyznaczanym doświadczalnie z przebiegu zależności $\frac{1}{\tau_M} = f(H_M)$, przedstawionej na rys. 8, jak to ma miejsce we wszystkich pracach z za-

kresu fizyki procesów magnesowania impulsowego polikrystalicznych ferromagnetyków o prostokątnej pętli histerezy. Badania nasze dotyczą zakresu pól odpowiadającego kreskowanemu odcinkowi krzywej na rys. 8. Dlatego też natężeniem granicznym pola H_0 będzie w naszym przypadku



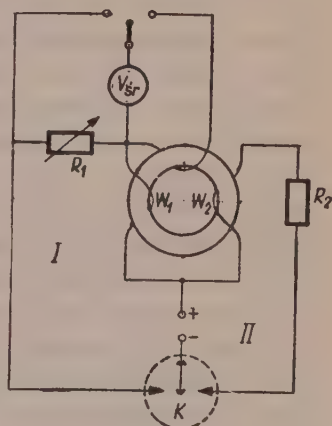
Rys. 7. Pełna pętla magnesowania rdzenia oraz cykl cząstkowy, którego jedna z połówek odpowiada magnesowaniu przygotowawczemu przez obwód II, a druga rozmagnesowywaniu przez obwód pomiarowy I.



Rys. 8. Wykres zależności odwrotności czasu przemagnesowania rdzenia o prostokątnej pętli od natężenia prostokątnego impulsu pola.

natężenie powściągające pola H_c określone z przebiegu statycznej pętli histerezy (rys. 3).

Metodyka pomiaru wynika jednoznacznie z określeń wielkości mierzonych, przyjętych jako charakterystyczne. W układzie pomiarowym przedstawionym schematycznie na rys. 9 mierzony rdzeń toroidalny magnesowany jest w czasie trwania każdego cyklu do wartości indukcji, bliskiej indukcji nasycenia B_s , przy czym przełącznik K znajduje się wówczas w położeniu II. W czasie przerzutu przełącznika w położenie I stan magnesowania rdzenia maleje samorzutnie do wartości, odpowiadającej pozostałości magnetycznej $+B_r$. Po ustaleniu się położenia I przełącznika rozpoczyna się proces rozmagnesowywania rdzenia przez pole wytwarzane prądem płynącym w obwodzie I, do poziomu odpowiadającego indukcji B_p (por. rys. 7). Bezwzględną wartość przyrostu $\Delta B = B_r - B_p$ możemy wyznaczyć wykorzystując zależność (2) i podstawiając $B_0 = B_r$.



Rys. 9. Schemat ideowy układu pomiarowego do wyznaczania charakterystyk dynamicznych rdzeni.

Biorąc pod uwagę, że wartość średnia napięcia indukowanego w trakcie magnesowania określa się zależnością

$$U_{sr} = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} u dt \quad (9)$$

(u — wartość chwilowa napięcia)

możemy wyrazić dla naszego przypadku przyrost indukcji w postaci

$$\Delta B = \frac{U_{sk} T}{2,22 w q} 10^8 \text{ Gs}, \quad (10)$$

gdzie

U_{sk} — napięcie mierzone na uzwojeniu pomiarowym o liczbie zwojów w za pomocą miernika wartości średnich, wyskalowanego (co ma miejsce w praktyce) w wartościach skutecznych (V_{sk}),

q — pole przekroju rdzenia w cm^2 ,

T — czas trwania cyklu magnesowania w (sek).

Przyrost indukcji otrzymuje się w tym przypadku w (Gs). Wartość ładunku magnesującego wyznaczano z pomiaru wartości średniej prądu, płynącego w obwodzie I (pomiar średniej wartości napięcia na oporności szeregowej R) układu przedstawionego na rys. 8. Wartość S obliczano z zależności

$$S = \frac{0,4 \pi w}{l} (I_{sr} - I_{csr}) T, \quad (11)$$

gdzie

I_{sr} — średnia wartość prądu płynącego w obwodzie I , (A),

I_{csr} — średnia wartość prądu odpowiadająca polu H_c , (A),

l — średnia długość drogi magnetycznej w rdzeniu (cm),

T — czas trwania cyklu magnesowania (sek).

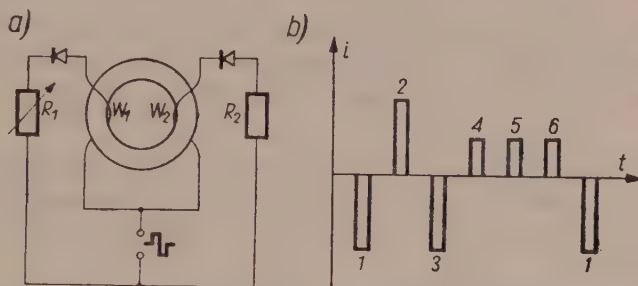
Ładunek magnesujący s wyraża się wówczas w Oe sek.

Prąd I_{csr} można wyznaczyć znając czas trwania procesu magnesowania od $+B_r$ do B_p i statyczne natężenie pola koercji H_c ; dogodniej jest jednak w praktyce określać prąd I_{csr} bezpośrednio z pomiaru jako graniczną wartość prądu magnesującego, powyżej której charakterystyka $\Delta B = \varphi(s)$ ulega silnemu zakrzywieniu (rozpoczynają się procesy nieodwracalne magnesowania).

Czas trwania procesu przemagnesowania cząstkowego przyjmowano równy połowie czasu trwania cyklu roboczego. Było to uzasadnione sposobem technicznej realizacji układu pomiarowego (rys. 8). W zakresie czasów magnesowania $\tau = 10$ msek do 2,5 msek stosowano jako przełącznik synchroniczny przekąznik telegraficzny spolaryzowany, sterowany prądem sinusoidalnym. Czas przełotu przekąznika był pomijany w obli-

czeniu przy czasie $\tau=10$ msek, a dla czasu 2,5 msek był uwzględniany przez ustalenie odpowiednio mniejszej częstotliwości generatora sterującego.

W zakresie czasów od 2,5 msek do 0,1 msek jako źródło impulsów wykorzystano generator tranzystorowo-magnetyczny, włączony w układ w sposób przedstawiony na rys. 10a. Do budowy generatora zastosowano tranzystory mocy o częstotliwości granicznej powyżej 10 MHz, opracowane przez Zakład Elektroniki IPPT PAN. Czas narastania czoła impulsów, ograniczony przez parametry układu generatora wynosił około 1 μ sek. Ponieważ generator tego typu wytwarza impulsy dwukierunkowe,



Rys. 10. a) Schemat ideowy współpracy tranzystorowego generatora fali prostokątnej z układem do pomiaru dynamicznych charakterystyk rdzeni. b) Ciąg impulsów prądowych magnesujących rdzeń w układzie pomiarowym w zakresie czasów magnesowania mniejszych niż 10 μ sek.

więc załączając go w sposób uwidoczniiony na rys. 10a otrzymuje się kolejne magnesowanie rdzenia za pomocą obwodów I i II. Izolacja galwaniczna obwodów następuje dzięki obecności diod D_1 i D_2 , które załączane są na przemian przez połówkę napięcia generatora tak, że zawsze w czasie przewodzenia jednej z diod druga ma przesunięty punkt pracy w stronę dużych oporności i nie przewodzi. Diody zastosowano półprzewodnikowe germanowe o prądzie wstecznym mniejszym niż prąd odpowiadający $0,1 H_c$ badanych rdzeni.

W zakresie czasów $\tau < 10 \mu$ sek pomiary przeprowadzane były przy zastosowaniu urządzenia impulsowego do pomiaru rdzeni pamięciowych, opisanego w [9]. W układzie tym przepuszcza się przez jarzmo jednozwojowe, obejmujące rdzeń mierzony, ciąg impulsów o usytuowaniu czasowym uwidoczniionym na rys. 10b. Amplitudy impulsów prądowych 1, 2, 3 ustalano tak, aby pole magnesujące miało wartość stałą równą 1 Oe. Regulowano amplitudy impulsów 4, 5, 6 uzyskując zmiany prądu magnesującego i ładunku. Przyrosty indukcji odczytywano bezpośrednio na ekranie synchronoskopu za pośrednictwem układu całkującego. Wartości ładunku obliczano mnożąc wartości amplitud impulsów przez czas ich

trwania i odejmując ładunki, odpowiadające polu H_c . Czasy narastania impulsów pomijano w obliczeniach.

Charakterystyki $\Delta B = \varphi(s)$ wykreslano biorąc jako zmienną niezależną średnią wartość pola magnesującego, a jako parametr — czas magnesowania τ przyjmowany za równy połowie czasu trwania całego cyklu magnesowania.

Oscylogramy napięć indukowanych zdejmowano przez fotografowanie przebiegu czasowego na ekranie synchronoskopu o szerokości pasma 10 MHz.

4. UZYSKANE WYNIKI DOŚWIADCZALNE

Badaniom według opisanej metodyki poddano rdzenie pierścieniowe zwijane z taśm ze stopu o prostokątnej pętli o zawartości 50% Ni, o różnych grubościach taśm oraz rdzenie ferrytowe. Mierzono rdzenie następujące:

a) rdzenie o grubościach taśm 0,06 mm i 0,1 mm produkcji (próbki laboratoryjne) Instytutu Metali Nieżelaznych w Gliwicach;

b) rdzenie o grubości taśmy 0,05 mm, próbki stopu HCR alloy produkcji angielskiej;

c) rdzenie o grubości 0,065 mm, próbki stopu permenorm 5000Z produkcji f-my Vacuumschmelze NRF;

d) rdzenie toroidalne z ferrytu Mn-Mg-Zn o nominalnym składzie 35 Fe₂O₃, 31 MnO, 22,5 MgO, 11,5 ZnO wypalane w atmosferze powietrznej o ciśnieniu około 1,5 mm Hg; średnice wewnętrzne i zewnętrzne rdzeni wynosiły odpowiednio około 3 mm i 4 mm.

Dane statyczne rdzeni metalicznych

$H_c = 0,12 - 0,16$ Oe, malejące ze wzrostem grubości taśmy,

$B_s = 12,5 - 14,5$ kGs,

$p = \frac{B_r}{B_s} =$ średnio 0,975 dla rdzeni ze stopu HCR, 0,95 — dla rdzeni ze stopu 5000Z Vacuumschmelze i rdzeni o grubości taśmy 0,06 mm produkcji krajowej; 0,9 do 0,93 dla rdzeni krajowych o grubości taśmy 0,1 mm (symbolem B_s oznaczamy wartość indukcji przy natężeniu pola magnesującego równym 5 Oe);

ρ — oporność właściwa dla prądu stałego, mierzona mostkiem Thompsona wahała się dla wszystkich materiałów w granicach od 0,4 do 0,48 $\mu\Omega\text{cm}$.

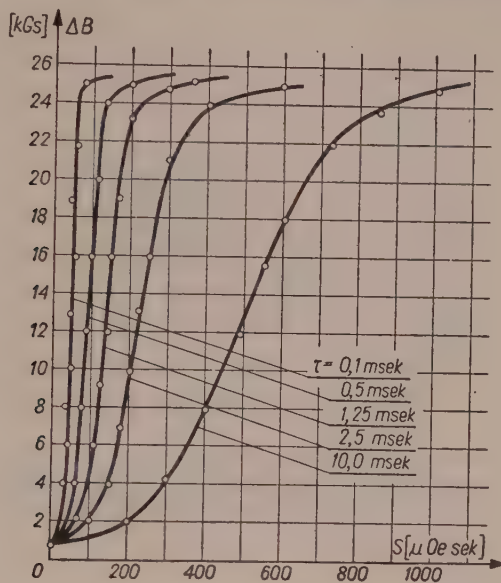
Dane statyczne ferrytu

$H_c = 0,15$ Oe (średnio) natężenie pola koercji,

$B_{10} = 2700$ Gs,

$B_r/B_{10}=0,9$. (B_{10} — indukcja magnetyczna przy natężeniu pola $H=10$ Oe, B_r — pozostałość magnetyczna).

Rodziny pomierzonych charakterystyk $\Delta B = \varphi(s)$ przedstawione są dla poszczególnych materiałów na rysunkach od 11 do 15. Podkreślić należy, że są to charakterystyki uniwersalne, jednoznaczne niezależne od

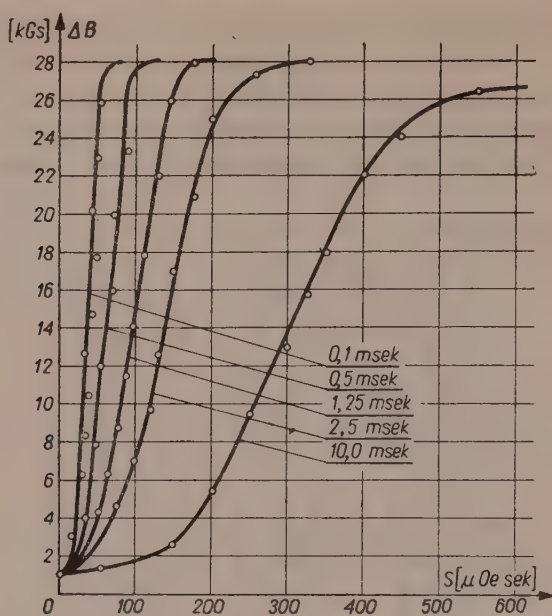


Rys. 11. Rodzina charakterystyk $\Delta B = \varphi(s)$ przy parametrze τ dla materiału produkcji angielskiej typu HCR alloy.

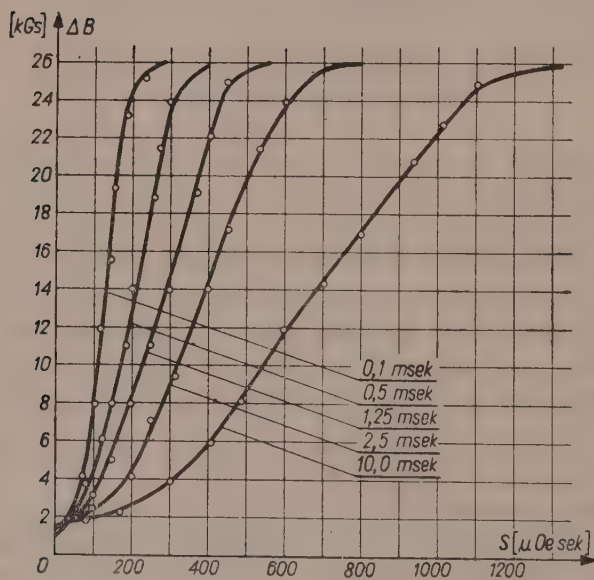
parametrów obwodu magnesującego. Liczne przeprowadzone próby pozwoliły na stwierdzenie, że zmieniając warunki magnesowania rdzeni począwszy od prądowych (duża oporność rzeczywista w obwodzie magnesującym) a skończywszy na warunkach magnesowania stałym napięciem (stosunkowo mała oporność rzeczywista obwodu magnesującego) nie otrzymuje się przy tym samym czasie magnesowania dostrzegalnej zmiany przebiegu zależności $\Delta B = \varphi(s)$.

Na rysunkach 16 i 17 przedstawiono przebiegi zależności $\log S = f\left(\log \frac{1}{\tau_M}\right)$. Przebiegi te wykazują w pewnym zakresie liniowość, która zostaje następnie naruszona.

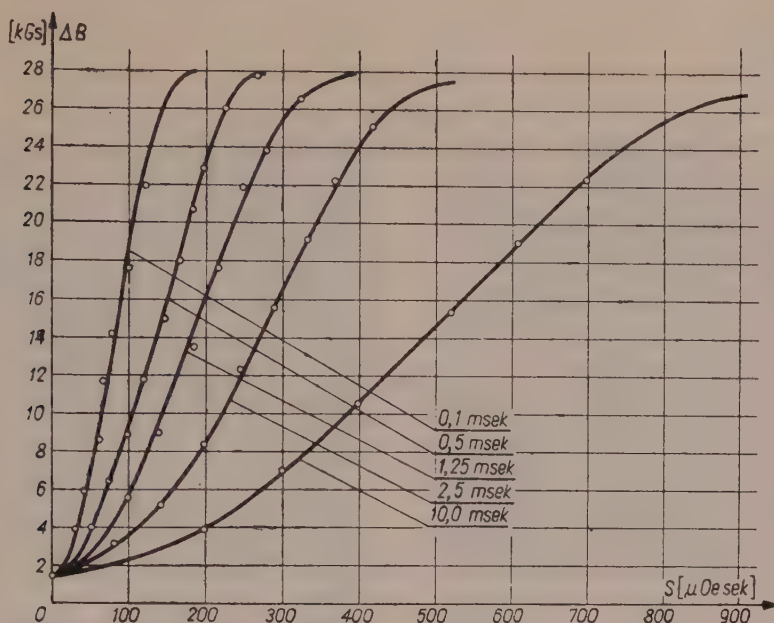
Przebiegi oscylogramów napięć indukowanych w rdzeniach w trakcie procesu magnesowania dla różnych wartości ładunku magnesującego uwidoczniono na rys. 18 i 19 a, b, c, d. Jest godne uwagi, że przebiegi czasowe napięć indukowanych przez prostokątne impulsy pola w rdzeniach produkcji krajowej i produkcji NRF są zewnętrźnie bardzo po-



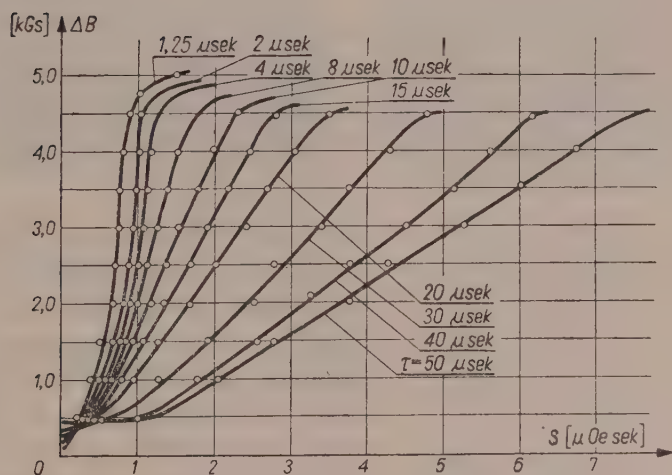
Rys. 12. Rodzina charakterystyk $\Delta B = \varphi(s)$ przy parametrze τ dla materiału produkcji NRF (f-ma Vacuumschmelze) typu permanorm 5000Z, 0,065 mm.



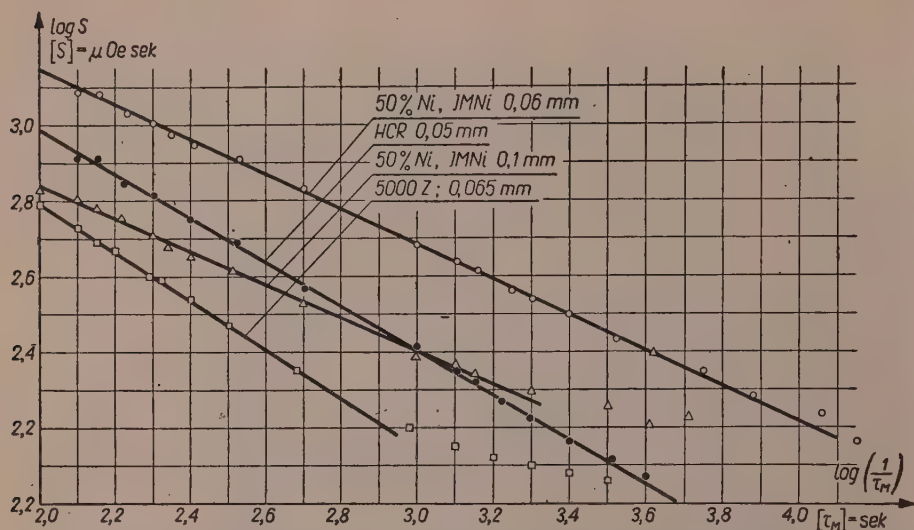
Rys. 13. Rodzina charakterystyk $\Delta B = \varphi(s)$ przy parametrze τ dla stopu o prostokątnej pętli o zawartości 50% Ni, produkcji krajowej IMN Gliwice, grubość taśmy 0,06 mm.



Rys. 14. Rodzina charakterystyk $\Delta B = \varphi(s)$ przy parametrze τ dla stopu 50% Ni produkcji IMN, grubość taśmy 0,1 mm.

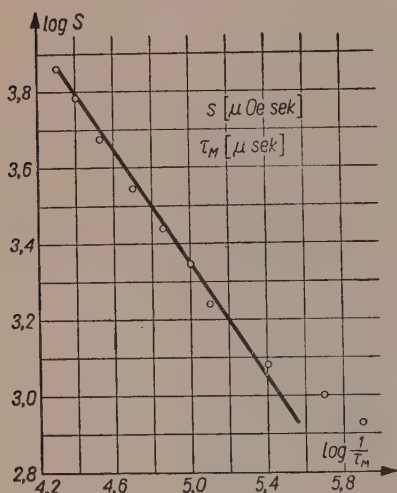


Rys. 15. Rodzina krzywych zależności pomiędzy przyrostem indukcji magnetycznej a elektrycznym ładunkiem magnetykującym dla ferrytu; parametrem jest czas magnesowania.



Rys. 16. Charakterystyki zależności ładunku właściwego pełnego przemagnesowania S od odwrotności czasu magnesowania w skali logarytmicznej dla czterech rodzajów materiałów metalicznych.

dobne i nierozróżnialne przy pomiarze metodą oscyloskopową. Dlatego oscylogramy na rys. 18 dotyczą w jednakowym stopniu obu tych rodzajów materiałów.

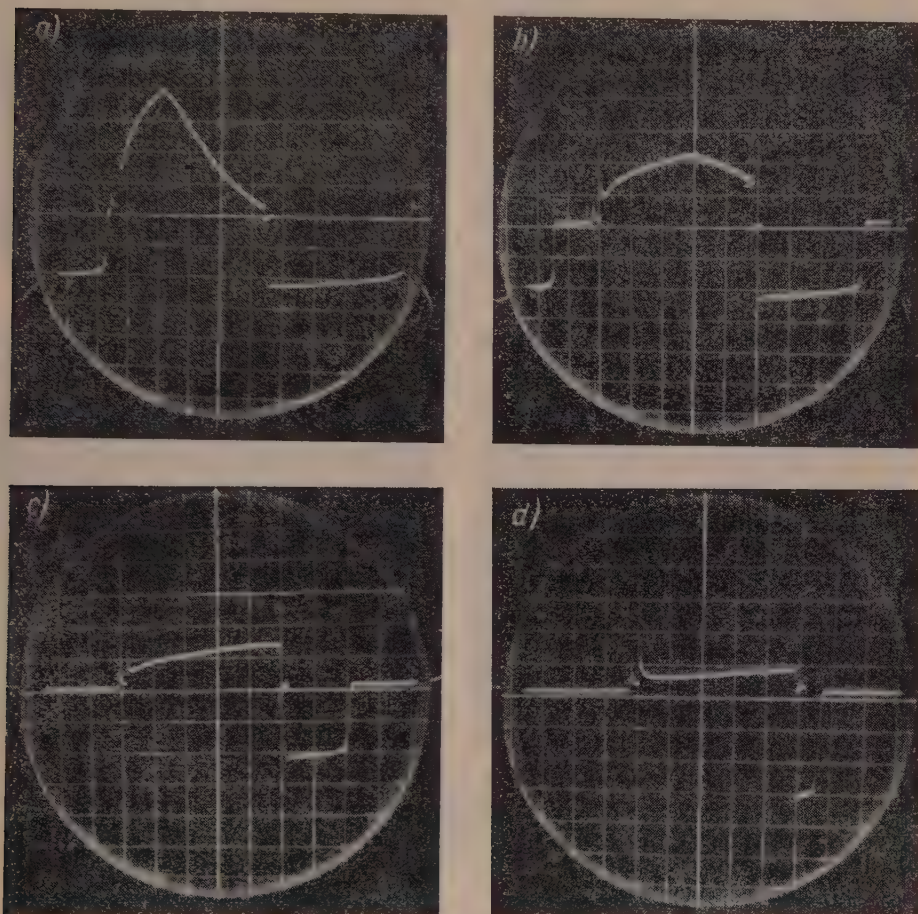


Rys. 17. Krzywa zależności pomiędzy odwrotnością czasu pełnego przemagnesowania rdzenia i ładunkiem elektrycznym, wykreślona w skali logarytmicznej dla ferrytu.

Przebiegi charakterystyk, przedstawionych na rys. 11 do 14 świadczą o braku (w stosunkowo szerokim zakresie) korelacji pomiędzy grubością taśmy a dynamicznymi zależnościami $\Delta B = \varphi(s)$. Konsekwencje tego spostrzeżenia z punktu widzenia teorii domenowej omówione zostaną w następnym rozdziale.

Przebiegi zależności uwidocznione na rys. 11 do 15 dotyczą, jak już wspomniano powyżej, części nieodwracalnej procesu magnesowania. Udział ilościowy procesów odwracalnych jest przy prostokątności powyżej 0,9 w praktyce pomijalnie mały. Przyrost indukcji powstały w trakcie odwracalnego procesu magnesowania odpowiada odległości początku krzywych $\Delta B =$

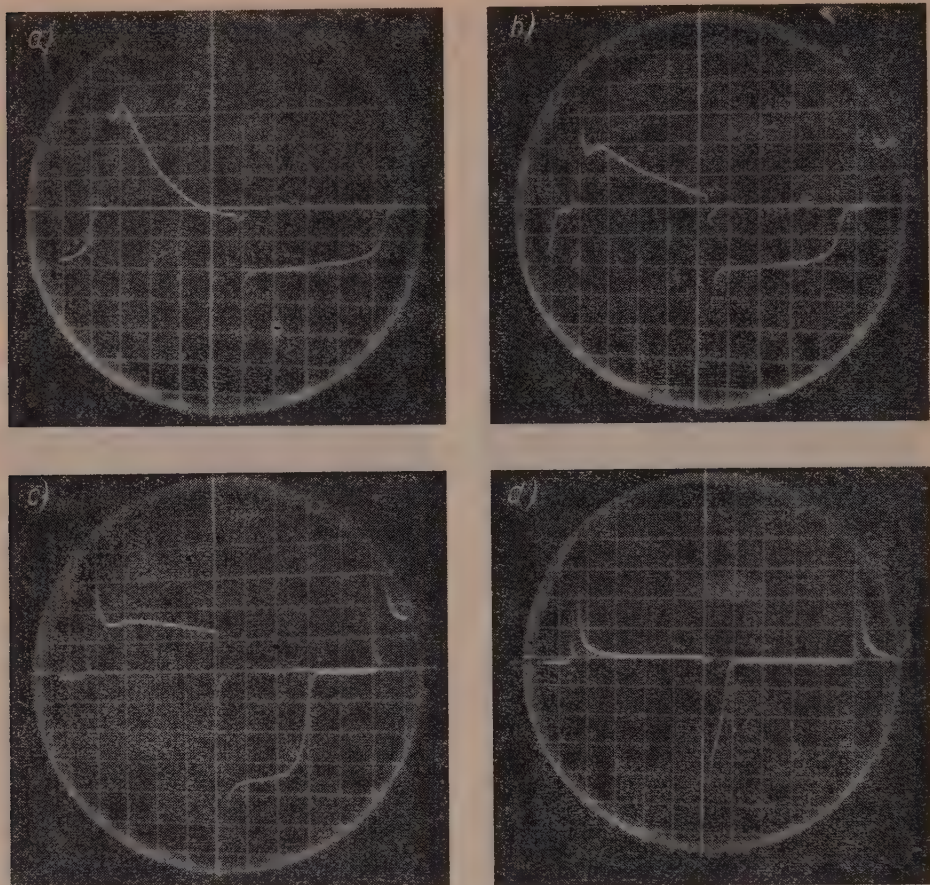
$=\varphi(s)$ od osi S (rys. 11 do 15). Może on być również wyznaczony przez graficzne scałkowanie przebiegów czasowych (rys. 18 i 19) pierwszych ostrych maksimów widocznych na oscylogramach



Rys. 18. Oscylogramy napięć indukowanych w procesie magnesowania rdzenia (w układzie pomiarowym (rys. 8)) z materiału HCR alloy, czas magnesowania $\tau=10$ msek. Przebiegi powyżej osi czasu dotyczą procesu rozmagnesowania rdzenia przez prostokątny impuls pola w obwodzie I, przebiegi poniżej osi czasu odnoszą się do procesu magnesowania przygotowanego przez obwód II w warunkach stałego napięcia.

- | | |
|---|---------------------|
| a) przebiegi dla wartości ładunku magnesującego | $s = S,$ |
| b) „ „ „ „ „ | $s = \frac{3}{4}S,$ |
| c) „ „ „ „ „ | $s = \frac{1}{2}S,$ |
| d) „ „ „ „ „ | $s = \frac{1}{4}S$ |

w skali nieco powiększonej w stosunku do przebiegów a), b), c).



Rys. 19. Oscylogramy napięć indukowanych w procesie magnesowania rdzenia z materiału permenorm 5000 Z. Warunki pomiaru te same jak w przypadku stopu HCR alloy.

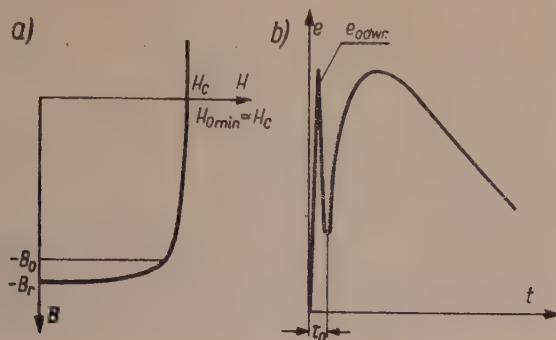
- a) przebiegi dla wartości ładunku $s = S$,
 b) „ „ „ „ „ $s = \frac{3}{4} S$,
 c) „ „ „ „ „ $s = \frac{1}{2} S$ w skali powiększonej
 d) „ „ „ „ „ $s = \frac{1}{6} S$ w skali na rys. d).

$$\int_0^{\tau_0} e_{odwr} dt = wq (B_r - B_0) \quad (12)$$

gdzie

q — pole przekroju rdzenia,

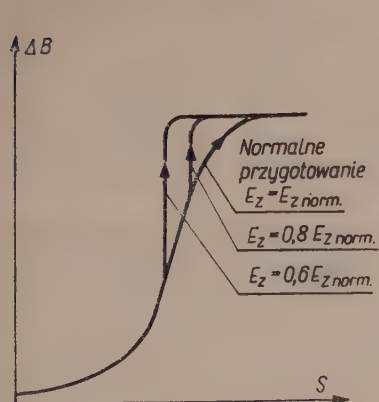
τ_0 — czas, w którym pole magnesujące osiąga wartość H_c . Pozostałe oznaczenia wynikają z rys. 20.



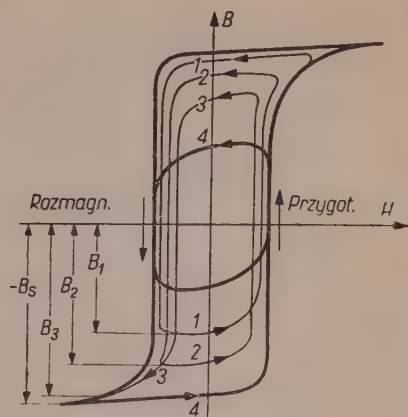
Rys. 20. Wyjaśnienie zmian namagnesowania, odpowiadających procesom odwracalnym magnesowania.

a) dolna prawa ćwiartka pętli magnesowania, przyrost indukcji $B_r - B_0$ odpowiada zmianom odwracalnym, b) przebieg czasowy indukowanego napięcia, pierwsze maksimum (słabo widoczne ze względu na krótki czas trwania na oscylogramach rys. 16 i 17) odpowiada procesom odwracalnym magnesowania.

Udział ilościowy odwracalnych procesów magnesowania związany jest bezpośrednio z wielkością statycznego współczynnika prostokątności. Im większy jest współczynnik prostokątności, tym mniejszy jest oczywiście udział przebiegów odwracalnych w procesie magnesowania rdzenia.



Rys. 21. Przebiegi charakterystyk $\Delta B = \varphi(s)$ otrzymane w wyniku niepełnego przygotowania rdzenia przez obwód II układu pomiarowego na rys. 8.



Rys. 22. Proces ustalania się cząstkowego cyklu magnesowania w rdzeniu nie przygotowanym „normalnie”, pod wpływem przyrostu ładunku magnesującego na granicy nieciągłości charakterystyki $\Delta B = \varphi(s)$ (rys. 21).

Przy wykonywaniu pomiarów charakterystyk $\Delta B = \varphi(s)$ należy zwrócić uwagę na jeden bardzo istotny szczegół. Chodzi mianowicie o kwestię jednoznaczności położenia punktu wyjściowego w procesie impulsowego magnesowania rdzenia. Okazuje się, że w przypadku niedostatecznie dużego stosunku SEM-nej źródła zasilającego do liczby zwojów uzwojenia przygotowawczego w_2 (rys. 8) otrzymuje się nieciągły przebieg charakterystyki $\Delta B = \varphi(s)$ (rys. 21). Wobec napięciowych w praktyce (dogodnych ze względu na oszczędność mocy) warunków magnesowania przygotowawczego przez obwód II (rys. 8) należy tak dobrać stosunek E_z/w_2 , by zgodnie z całkową postacią prawa Faradaya:

$$\int_0^{\tau} e_z dt \geq w_2 (\Phi_r + \Phi_s) \approx 2w_2 \Phi_s, \quad (13)$$

gdzie

Φ_s — strumień nasycenia.

Warunki spełniające zależność (13) nazywać będziemy warunkami normalnego przygotowania. W przypadku przygotowania mniejszego niż normalne, rdzeń rozmagnesowany przez obwód I do indukcji B_p (rys. 9) nie zostanie namagnesowany do nasycenia przez obwód II. Stan magnetyczny zatem, jaki zastanie kolejny impuls probierczy, płynący w obwodzie I będzie odbiegał od stanu właściwej pozostałości magnetycznej B_r . Fizycznie równoznaczne to będzie z istnieniem pewnej liczby domen ferromagnetycznych o znaku magnetyzacji przeciwnym do panującego w całej masie rdzenia. W konsekwencji ten sam ładunek rozmagnesuje rdzeń w większym stopniu, niżby to mogło mieć miejsce dla przypadku przygotowania normalnego. Sytuacja będzie powtarzała się w następnych cyklach z tym, że poziom indukcji B_p będzie kolejno obniżał się przechodząc przez stany B_1, B_2, B_3 itd. (rys. 22) aż do stanu bliskiego nasycenia ujemnego $-B_s$. Cały przebieg zachodzi w tym przypadku przy stałej wartości ładunku magnesującego, co przejawia się zewnętrźnie w nieciągłości charakterystyki $\Delta B = \varphi(s)$.

W praktyce dobierając stosunek E_z/w_2 tak, aby czas magnesowania przygotowawczego rdzenia był o 50% krótszy niż czas trwania impulsu napięcia zasilającego otrzymuje się dostateczną jednoznaczność przebiegu zależności $\Delta B = \varphi(s)$. Przebieg zależności indukcja magnetyczna — ładunek magnesujący przy przygotowaniu mniejszym niż normalne wykazuje niejednoznaczność tym większą, że obciążoną histerezą (rys. 23). W praktyce pomiarowej należy zatem zwracać na to baczną uwagę.

5. MOŻLIWOŚCI ANALITYCZNEJ APROKSYMACJI OTRZYMANYCH DOŚWIADCZALNIE PRZEBIEGÓW CHARAKTERYSTYK

Dokonane próby wykazały, że krzywe $\Delta B = \varphi(s)$ dadzą się aproksymować z dostatecznie dużą dokładnością przez zależność funkcjonalną

o postaci

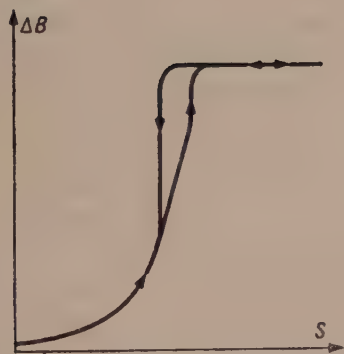
$$\Delta B = C_1 + C_2 \operatorname{th}(as - \beta). \quad (14)$$

Stałe C_1 , C_2 i β można wyznaczyć z warunków początkowych; wiadome jest bowiem, że przy $s=0$; $\Delta B = B_r - B_0$ (rys. 20).

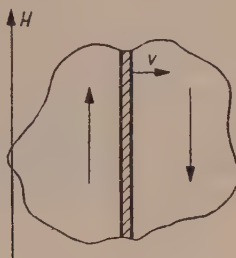
W praktyce jednak należy rozpatrywać cały eksperymentalny przebieg, gdyż wartość wyznaczona bezpośrednio jako $\operatorname{arth} \frac{B_0}{B_r}$ byłaby obarczona dużym błędem ze względu na małą dokładność pomiaru w początkowym zakresie pól magnesujących.

Zależność $S = f\left(\frac{1}{\tau_M}\right)$ daje się przedstawić z dużą dokładnością w postaci:

$$S = C + A \tau_M^S. \quad (15)$$



Rys. 23. Histeretyczny przebieg charakterystyki $\Delta B = \varphi(s)$ w warunkach niepełnego przygotowania mierzzonego rdzenia.



Rys. 24. Fragment uproszczonej struktury ferromagnetyka z poruszającą się ścianą Blocha, dzielącą obszary namagnesowane przeciwnie. Ruch ściany zachodzi pod wpływem pola H w kierunku takim, że obszar namagnesowania o kierunku zgodnym z kierunkiem pola H powiększa się.

W zasadzie dysponując przebiegami (14) i (15) można dla konkretnego materiału wyznaczyć przebieg zależności $\Delta B = \varphi_1(s)$ przy parametrze H_M — amplituda prostokątnego impulsu pola magnesującego, a następnie przez różniczkowanie względem czasu — przebieg czasowy indukowanego w rdzeniu napięcia. Obliczenia tego rodzaju komplikuje okoliczność, że współczynnik β zależy od czasu magnesowania τ przez co rachunek staje się praktycznie bardzo trudny do wykonania. W przy-

padku jednak, gdy nie jest istotny przebieg czasowy indukowanej SEM-nej zależności $\Delta B = \varphi(s)$, można aproksymować na stosunkowo długim odcinku linią prostą.

6. INTERPRETACJA OTRZYMANYCH WYNIKÓW Z PUNKTU WIDZENIA TEORII DOMEN FERROMAGNETYCZNYCH

Zagadnienie fizycznego modelu procesu magnesowania ferromagnetyków o prostokątnej pętli histerezy jest przedmiotem szeregu prac [4] [5] [7] [10] [15] [17] [22] [28]. W aktualnym stanie wiedzy trudno jest jeszcze mówić o pełnej zgodności poglądów na temat istoty fizycznej procesu magnesowania dla poszczególnych rodzajów materiałów. Nagromadzony jednak materiał doświadczalny pozwala już obecnie na stwierdzenie, że w zakresie stosunkowo słabych pól magnesujących przemagnesowanie ferromagnetyka o prostokątnej pętli odbywa się przez przesuwanie się ścian domenowych na korzyść domen o znaku magnetyzacji zgodnym z kierunkiem przyłożonego pola magnesującego (rys. 24). Granica międzysdomenowa (ściana Blocha), oddzielająca obszary spontanicznego namagnesowania o przeciwnym znaku, przesuwa się pod wpływem pola magnesującego, co równoznaczne jest z kolei ze zmianą w czasie indukcji magnetycznej i indukowaniem się w uzwojeniu pomiarowym SEM. W odniesieniu do ferromagnetyków w postaci monokrystalicznej obowiązuje dla ruchu ściany domenowej następująca zależność (27):

$$\frac{dB}{dt} = k_1 v = k_2 (H_M - H_0), \quad (16)$$

gdzie

v — chwilowa prędkość ruchu ściany Blocha,

B — indukcja magnetyczna,

H_M — pole magnesujące,

H_0 — pole krytyczne, po przekroczeniu którego rozpoczyna się proces nieodwracalnego przesuwania ściany,

k_1, k_2 — stałe fizyczne.

Zależność (16) obowiązuje jedynie dla monokryształów i tylko w ograniczonym bardzo zakresie pól magnesujących. Okazuje się, że przy polach przekraczających znacznie wartość H_0 prędkość ruchu ściany pod wpływem prostokątnego impulsu pola przestaje być stałą, określając się zależnością bardziej złożoną.

Rozpatrzenie procesu przemagnesowania ferromagnetyków polikrystalicznych (strukturę tę ma większość materiałów technicznych) staje się problemem niezmiernie skomplikowanym wobec występowania całego szeregu czynników, z których do najważniejszych należą:

- gęstość i rozkład przestrzenny zarodników domen o znaku magnesowania przeciwnym do panującego w całej masie ferromagnetyka, znajdującego się w stanie namagnesowania szczątkowego, bliskiego stanowi nasycenia dla ferromagnetyków o prostokątnej pętli,
- stopień jednorodności wartości pola H_0 , przy którym rozpoczyna się proces nieodwracalnego przesuwania ściany Blocha pojedynczej domeny,
- oddziaływanie prądów wirowych, związane ze skończonymi wymiarami geometrycznymi i skończoną przewodnością elektryczną masy ferromagnetyka, biorącej udział w procesie magnesowania,
- hamujące ruch ścian domenowych działanie czynników fizycznych mikroskopowych, do których należą czynniki uwarunkowane relaksacyjnym charakterem obrotów elementarnych momentów magnetycznych oraz występowaniem lokalnych prądów wirowych, tzw. mikroprądów, w odróżnieniu od prądów wirowych makroskopowych (wymienionych powyżej),
- udział energii ścian domenowych, formowanych i rozrastających się w procesie magnesowania,
- zależność warunków magnesowania od geometrycznej konfiguracji magnesowanego rdzenia i kształtu impulsu pola magnesującego.

Ogólnie rzecz biorąc, wychodząc z zasady minimalizacji sumy energii swobodnej magnesowanego ciała (suma energii magnetycznej, anizotropii magnetokrystalicznej i magnetostrykcji) można rozwiązując powstały problem wariacyjny znaleźć równania charakteryzujące stany magnesowania rdzenia tak w polach wielkiej jak i małej częstotliwości. W przypadku ferromagnetyków polikrystalicznych jest to jednak w praktyce nierealne ze względu na złożoność wymienionych powyżej czynników, mających istotny wpływ na przebieg procesów magnesowania. W rozważaniach praktycznych bierze się dlatego pod uwagę jedynie wpływ czynników dominujących czyniąc szereg założeń upraszczających.

Biorąc za podstawę rozważań dominujący wpływ prądów wirowych stosuje się na ogół metodę Wolmana i Kadena [28], polegającą na rozpatrzeniu propagacji fali elektromagnetycznej płaskiej w głąb taśmy ferromagnetyka o grubości pomijalnie małej względem jej szerokości i długości, jak również względem promienia krzywizny. Zakłada się, że pętla histerezy jest idealnie prostokątna, a wpływ czynników fizycznych mikroskopowych — pomijalny. Metodę tę zastosowano w [17] i znaleziono, że ładunek magnesujący właściwy, potrzebny do pełnego przemagnesowania od $(+B_s$ do $-B_s)$ pojedynczego zwoju taśmy ma wartość stałą i określa się z zależności:

$$S_{w1} = \frac{B_s d^2}{4\varrho}, \quad (17)$$

gdzie

B_s — indukcja nasycenia,

d — grubość taśmy ferromagnetyka,

ϱ — oporność właściwa materiału dla prądu stałego.

Dla przypadku rdzenia pierścieniowego, zwijanego (rozwiązanie najczęściej spotykane w praktyce dla omawianego typu materiałów) można obliczyć wartość biorąc za podstawę wyrażenie określające chwilową SEM indukowaną w uzwojeniu jednoczwojowym w procesie magnesowania rdzenia za pośrednictwem przyłożonego pola $H(t)$ [17]

$$e(\tau) = \frac{2h[H(t) - H_c]}{\sqrt{\frac{1}{\varrho B_s} \int_0^\tau [H(t) - H_c] dt}}, \quad (18)$$

gdzie

$H(t)$ — pole magnesujące, będące funkcją czasu t ,

B_s — indukcja nasycenia,

h — szerokość taśmy.

Napięcie indukowane w procesie magnesowania rdzenia o N zwojach taśmy jest sumą wszystkich napięć, indukowanych w pojedynczych zwojach. Przy N dostatecznie dużym sumę można zastąpić całką i wówczas pełne napięcie indukowane, przypadające na jeden zwój uzwojenia wyrazi się zależnością

$$e_c(\tau) = \frac{N}{l_z - l_w} \int_0^{\tau} e(\tau) dt, \quad (19)$$

gdzie

$e(\tau)$ — określone jest przez (18), $l_w = \pi D_w$; $l_z = \pi D_z$,

D_z i D_w — odpowiednio średnica zewnętrzna i wewnętrzna rdzenia.

Rozwiązanie całki stanowiącej prawą stronę (19) nie jest w ogólnym przypadku łatwe, jeśli weźmiemy pod uwagę, że na skutek działania pola magnesującego $H(t)$ poszczególne zwoje będą się przemagnesowywały niejednocześnie. Aby otrzymać rozwiązanie w postaci zamkniętej założymy więc, że pole $H(t)$ osiąga swoją wartość chwilową jednocześnie dla wszystkich zwojów magnesowanej taśmy. Wówczas uwzględniając, że $N = \frac{D_z - D_w}{2d}$ otrzymamy w wyniku scałkowania (19) wyrażenie następujące:

$$e_c(\tau) = \frac{1}{2} \sqrt{2} \frac{h}{d} \sqrt{\frac{1}{\varrho B_s} (1/\sqrt{D_z} - 1/\sqrt{D_w})} \sqrt{\frac{H(t) - H_c}{\int_0^\tau [H(t) - H_c] dt}}. \quad (20)$$

Uwzględniając z kolei, że $e_c = \frac{d\Phi}{dt}$ i całkując (20) obustronnie względem czasu τ otrzymamy dla bezwzględnego przyrostu indukcji wyrażenie następujące:

$$\Delta B = \frac{2\Delta\Phi}{h(D_z - D_w)} = \frac{4}{d} \sqrt{\frac{2\rho B_s(D_z + D_w)}{(\sqrt{D_z} + \sqrt{D_w})^2}} \cdot \sqrt{s}, \quad (21)$$

gdzie s określone jest przez (7) przy założeniu $\varepsilon_0 = 0$.

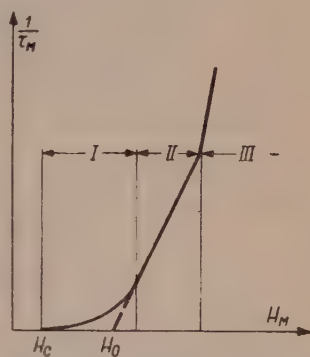
Równanie (21) wyraża zależność pomiędzy przyrostem indukcji B a ładunkiem magnesującym s przepływającym w czasie magnesowania τ . Podstawiając w (21) $\Delta B = 2B_s$ otrzymamy po przekształceniu wyrażenie na wartość pełnego ładunku magnesującego rdzenia

$$S_w = \frac{B_s d^2 \cdot 10^{-8}}{8\rho} \left(1 + \frac{2\sqrt{D_z D_w}}{D_z + D_w} \right) \frac{A \text{ sec}}{\text{cm}}, \quad (22)$$

$$[\rho] = \Omega \text{ cm}; \quad [B_s] = \text{Gs}; \quad [d], [D_z], [D_w] = \text{cm}.$$

Najczęściej badaną zależnością, charakteryzującą, dynamiczne właściwości ferrytów o prostokątnej pętli magnesowania jest przebieg odwrotności czasu pełnego przemagnesowania rdzenia toroidalnego w funkcji amplitudy prostokątnego impulsu pola magnesującego H_M (rys. 8). Jeden z typowych przebiegów tej zależności uwidoczniony jest na rys. 25. W całym zakresie rozpatrywanej charakterystyki można wyodrębnić trzy obszary. W obszarze I, dotyczącym pól magnesujących nieznacznie przekraczających pole koercji H_c przeważają w procesie przemagnesowywania ruchy ścian Blocha. W obszarze II mamy do czynienia z procesami rotacji wektorów magnetyzacji domen w kierunku przyłożonego pola magnesującego. Są to procesy rotacyjne niekoherentne zgodnie z terminologią wprowadzoną przez Gyorgiego [4]. W obszarze III z kolei dominującą rolę odgrywają rotacje koherentne wektorów magnetyzacji.

Przez dłuższy czas trwał w literaturze spór na temat dominującego mechanizmu magnesowania ferrytów. Badania eksperymentalne jednak, które miały na celu potwierdzenia słuszności koncepcji przesunięć ścian Blocha [5] czy też koncepcji rotacji wektorów [4] prowadzone były



Rys. 25. Krzywa zależności pomiędzy natężeniem pola magnesującego (wartość amplitudowa) a odwrotnością czasu pełnego przemagnesowania rdzenia ferrytowego z uwidocznionymi trzema strefami odpowiadającymi różnym mechanizmom magnesowania.

w zakresie silnych pól znacznie przekraczających pole H_c . Dlatego też zarówno Menyuk i Goodenough [5] jak i Gyorgy [4] wprowadzili pojęcie pola krytycznego H_k , które wyznaczone doświadczalnie ekstrapolując aż do przecięcia z osią odciętych pierwszy odcinek prostoliniowy zależności $\frac{1}{\tau_M} = f(H_M)$ na rys. 25. Wprowadzony dla celów praktycznych współczynnik przełączania S określał się z (6)

$$S = (H_M - H_c) \tau_M. \quad (5a)$$

Gyorgy [4], biorąc za punkt wyjścia model rotacyjny magnesowania uzyskał dla pochodnej czasowej wektora magnetyzacji wyrażenie następujące:

$$\dot{\vec{M}} = \frac{M_s (H - H_k)}{\gamma'} \left[1 - \left(\frac{\dot{\vec{M}}}{M_s} \right)^2 \right], \quad (23)$$

gdzie

- $\gamma' = \gamma^{-1} (1 + a^{-2})$ — stała cyromagnetyczna — $17,5 \cdot 10^6 \text{ Oe}^{-1} \text{ sek}^{-1}$,
- a — stała tłumienia obrotu spinów,
- M_s — magnetyzacja nasycenia
- wszystkie wielkości w układzie jednostek cgs.

Całkując (23) względem czasu i uwzględniając, że $M = \frac{B-H}{4\pi} \approx \frac{B}{4\pi}$, analogicznie przeprowadzając pewne niezbędne przekształcenia można otrzymać dla przebiegu $\Delta B = g \mu_B$ następującą zależność analityczną

$$\Delta B = B_s + B_s \ln \left(\frac{S}{\gamma'} - \text{arth} \frac{B_s}{B_s} \right) \quad (24)$$

Współczynnik przełączania S można określić z powyższej zależności zakładając $\Delta B = 0,9 (B_s - B_c)$ oraz $\frac{B_s}{B_c} = 0,9$

$$S_r = \gamma' (\text{arth } 0,81 + \text{arth } 0,9). \quad (25)$$

Porównując przebiegi krzywych uwidocznione na rysunkach od 11 do 14 dla magnetyków metalicznych i odpowiednio na rys. 13 dla ferrytów można stwierdzić, że krzywe graniczne dla czasu magnesowania $\tau \rightarrow 0$ wykazują przebiegi zgodne z obliczonymi odpowiednio z wyrażen (21) i (24) wartości współczynników przełączania S , obliczone z zależności (22) i (25) są również wartościami granicznymi, do których dążą krzywe $\log S = f \left[\log \left| \frac{1}{\tau_M} \right| \right]$ przedstawione na rys. 16 i 17.

Biorąc pod uwagę powyższe zaproponować można dla pełnego ładunku magnesującego S następujące wyrażenie ogólne

$$S = S_w + S_r + A\tau_M^d, \quad (26)$$

gdzie

S_w — składowa uwarunkowana wpływem makroskopowych prądów wirowych określona przez (22),

S_r — składowa stała w odpowiednim zakresie pól magnesyjących (I lub H) uwarunkowana relaksacyjnym charakterem obrotu spinów, określona przez (25),

A — pewna stała fizyczna, zależna od stopnia niejednorodności pola startu ścieżek domenowych, przy czym minimalnym polem startu (powyżej którego zachodzą zmiany nieodwracalne stanu magnesowania) jest tu pole koercji H_c ,

τ_M — czas magnesowania od stanu remanencji do 0.9 indukcji nasycenia,

d — wykładnik potęgi mniejszy od jedności.

Dla ferrytów praktycznie $S_w \approx 0$, dla metalicznych ferromagnetyków o grubości taśmy powyżej 0.03 mm składowa $S_r \ll S_w$. W ogólnym przypadku należy się jednak liczyć z wpływem obu składowych stałych.

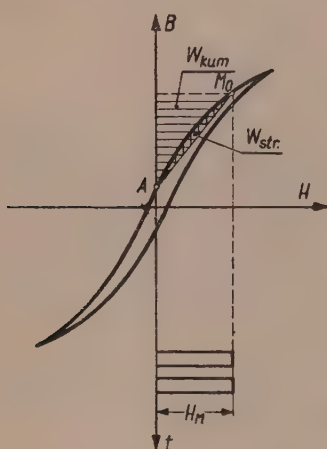
Składowa zmienna $A\tau_M^d$ charakterystyczna dla długich czasów magnesowania (stałych pól magnesyjących) ma zasadnicze znaczenie z punktu widzenia zastosowań rdzeni o prostokątnej pętli magnesowania do celów konstrukcji wzmacniaczy magnetycznych dławikowych.

7. ZASADNIENIE MODELU ELEKTRYCZNEGO UZWOJONEGO RDZENIA O PROSTOKĄTNEJ PĘTLI HISTEREZY

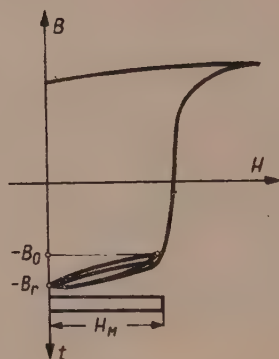
W procesie zmiany stanu namagnesowania rdzenia ulega zmianie jego energia magnetyczna, która w przypadku materiałów o małym stosunku B/B_s może być po usunięciu pola zwrócona w znacznej części do obwodu elektrycznego, magnesyjącego. W trakcie magnesowania np. impulsami jednokierunkowymi materiału o kształcie pętli magnesowania, przedstawionym na rys. 26 stan namagnesowania materiału zmienia się wzdłuż pętli cząstkowej AM. W czasie trwania impulsu magnesyjącego energia jego powoduje częściowo wzrost energii magnetycznej nagromadzonej w rdzeniu a częściowo zmienia się na ciepło. Po zaniku impulsu magnesyjącego nagromadzona w rdzeniu energia wydziela się do obwodu zewnętrznego za pośrednictwem prądu o przebiegu oscylacyjnym lub aperiodycznym. W przypadku rdzeni o pętli magnesowania ostrokątnej wartości energii kumulowanej i traczonej w rdzeniu są współmierne ze sobą i uprawiają to stosowanie koncepcji przenikalności zespolonej (por. wyżej). Z fizycznego punktu widzenia, pętla ostrokątna o małym stosunku B/B_s odpowiada przewodzie odwracalnych procesów magnesowania.

W odniesieniu do ferromagnetyków o prostokątnej pętli magnesowania koncepcja przenikalności zespolonej da się zastosować wprost jedynie do płaskiego, początkowego odcinka pętli magnesowania, odpowiadającego odwracalnym, sprężystym procesom magnesowania (rys. 27). Magnesowanie na tym odcinku związane jest z występowaniem słabego zjawiska histerezy z przewagą ilościową energii gromadzonej w stosunku do energii strat.

Jeśli rozpatrzymy proces pełnego przemagnesowania rdzenia np. od stanu $-B_r$ do stanu $+B_r$ (rys. 28), to stwierdzimy łatwo, że ilościowy udział energii kumulowanej w rdzeniu (pole zakreskowane pionowo na



Rys. 26. Ostrokątna pętla histerezy ferromagnetyka. Pole zakreskowane poziomo odpowiada energii gromadzonej w rdzeniu, pole zakratkowane — energii strat, powstających w procesie magnesowania.



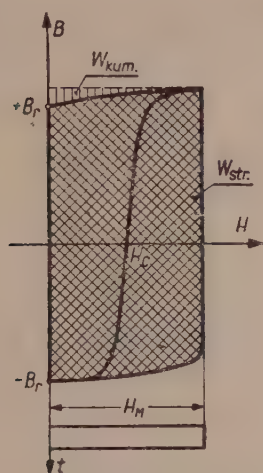
Rys. 27. Część pętli prostokątnej, widoczna u dołu mała pętla odpowiada obszarowi przeważających zmian odwracalnych w procesie magnesowania.

rys. 28) wyraża się dla praktycznie stosowanych ferromagnetyków o prostokątnej pętli cyfrą kilku procent od wartości energii traconej w procesie magnesowania. Uzwojony więc rdzeń o prostokątnej pętli magnesowania ma przede wszystkim cechy oporności rzeczywistej.

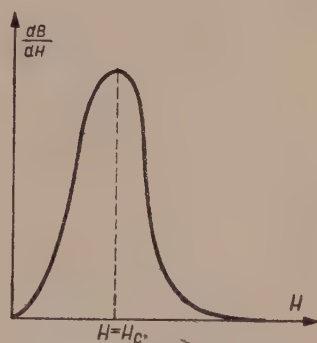
Formalnie rzecz biorąc wprowadzić można pojęcie indukcyjności dynamicznej, związanej z chwilową wartością dynamicznej przenikalności różniczkowej stromego zbocza pętli $\mu_d = \frac{dB}{dH}$. Abstrahując jednak

nawet od trudności natury rachunkowej (silnie nieliniowa zależność statycznej μ_d por rys. 29) koncepcja taka jest pozbawiona w wielu przy-

padkach sensu fizycznego ze względu na brak jednoznacznych zależności pomiędzy chwilowymi wartościami indukcji magnetycznej i pola w warunkach magnesowania impulsowego. Warto również zaznaczyć, że w wyrażeniach na czas pełnego przemagnesowania rdzenia nie wchodzi przenikalność różniczkowa. W przypadku bowiem magnesowania w warunkach stałego napięcia, czas magnesowania określa się bezpośrednio z prawa Faradaya w postaci całkowej. W warunkach natomiast magnesowania prądowego czas magnesowania zależy od amplitudy pola magnesującego i szeregu czynników fizycznych mikroskopowych. W obu przy-



Rys. 28. Część pętli prostokątnej magnesowania. Niewielkie pole zakreskowane pionowo odpowiada energii gromadzonej w rdzeniu, pole zakratkowane odpowiada przeważającej w tym przypadku energii strat.



Rys. 29. Zależność przenikalności różniczkowej materiału o prostokątnej pętli od wartości natężenia pola.

padkach nie można mówić nie tylko o zależności funkcjonalnej ale i o istnieniu silniejszej korelacji pomiędzy wartością przenikalności różniczkowej i czasem przemagnesowania.

Pojęcie energetycznie równoważnej oporności rdzenia o prostokątnej pętli histerezy dla impulsów prostokątnych prądu magnesującego zostało po raz pierwszy wprowadzone w [23]. Korzystając z eksperymentalnie wyznaczonych jednoznacznych zależności pomiędzy przyrostem indukcji i ładunkiem właściwym magnesującym można zaproponować dla określenia oporności zastępczej średniej wyrażenie o postaci następującej:

$$\tilde{R} = \frac{\bar{U}_{sr}}{\bar{I}_{sr}} = \frac{\frac{w \Delta B q}{\tau}}{\frac{Q}{\tau}} = \frac{0,4 \pi \Delta B q w^2}{l (H_c \tau + s)} 10^{-8} [\Omega], \quad (27)$$

gdzie

- \tilde{R} — nieliniowa oporność równoważna rdzenia,
- \bar{U}_{sr} — średnia wartość napięcia, indukowanego w procesie magnesowania wzdłuż cyklu cząstkowego na pętli $B-H$,
- \bar{I}_{sr} — średnia wartość prądu w czasie przyrostu strumienia,
- s — ładunek właściwy magnesujący, powodujący przyrost indukcji o wartość ΔB ,
- Q — całkowity ładunek elektryczny,
- q — pole przekroju rdzenia,
- l — długość średniej drogi magnetycznej w rdzeniu,
- w — liczba zwojów,
- τ — czas magnesowania,
- H_c — natężenie pola koercji.

Podstawiając wymiary geometryczne w cm, czas w sek., ładunek właściwy w Oe sek., pole w Oe, indukcję w Gs otrzymamy z wyrażenia (22) wartość oporności w Ω .

Zdefiniowana w ten sposób oporność nieliniowa wyraża się stosunkiem średnich wartości napięcia i prądu w uzwojeniu w czasie magnesowania rdzenia od stanu nasycenia. Ze względu na właściwości charakterystyk $\Delta B = \varphi(s)$ oporność ta jest niezależna od wartości oporności rzeczywistej obwodu magnesującego, co ma istotne znaczenie z punktu widzenia analizy obwodu elektrycznego, zawierającego rdzeń uzwojony o prostokątnej pętli magnesowania.

8. WNIOSKI

Przeprowadzone badania umożliwiły odmienną niż dotychczas przyjętą — interpretację dynamicznych właściwości rdzeni metalicznych i ferrytowych o prostokątnej pętli histerezy. Zbadane przebiegi zależności $\Delta B = \varphi(s)$ szczególnie w zakresie pól słabych mają podstawowe znaczenie z punktu widzenia analizy obwodów magnetycznych stosowanych do celów konstrukcji wzmacniaczy magnetycznych dławikowych. Uzyskane wyniki skłaniają również do rewizji przyjętych metod projektowania układów magnetycznych, złożonych z elementów dwustanowych, gdzie jednym z podstawowych założeń było przyjęcie stałości współczynnika przełączania S , co jest uzasadnione jedynie w zakresie stosunkowo silnych pól magnesujących. Porównując wyniki badań magnetyków meta-

licznych i ferrytów, przedstawione w niniejszej pracy można stwierdzić ogólny charakter zależności pomiędzy przyrostem indukcji magnetycznej a elektrycznym ładunkiem magnesującym dla ferromagnetyków polikrystalicznych niezależnie od ich struktury.

WYKAZ LITERATURY

1. Bul B. K.: *Metod rasczota katuszki so staliu na pieremiennom tokie*. Elektryczestwo, Nr 8/1954, ss. 22—27.
2. Feldkeller R.: *Die Theorie der Spulen und Überträger*. Verlag Hirzel 1958.
3. Friedlaender F. J.: *Flux reversal in magnetic amplifiers cores*. A.I.E.E. Trans., vol. 75 cz. I 1956, ss. 268—278.
4. Gyorgy E. M.: *Rotational model of flux reversal in square-loop ferrites*. Journ. of Appl. Phys., vol. 28 Nr. 9/1957 ss. 1011—1015.
5. Goodenough J. B.: *The theory of domain creation and coercive force in polycrystalline ferromagnetics*. Phys. Rev., vol. 195/1954 s. 917.
6. Johannessen P. R.: *Analysis of magnetic amplifiers by the use of difference equations*. A.I.E.E. Trans., vol. 73 cz. I 1954 ss. 700—711.
7. Humphrey F. B.; Gyorgy E. M.: *Flux reversal in soft ferromagnetics*. Journ. of Appl. Phys., vol. 30 Nr 6/1959 ss. 935—939.
8. Kittel C.: *Introduction to solid state physics*. Second Edition 1957, John Wiley, Chapman — Hall itd.
9. Lachowicz H., Markowski J.: *Urządzenia impulsowe do pomiarów właściwości pamięciowych rdzeni ferrytowych*. Arch. Elektrot. z. 1, 1961.
10. Lee Shevel W. Jr.: *Milimicrosecond switching properties of ferrite computer elements*. Journ. of Appl. Phys., suppl. vol. 30 Nr 2/1959 s. 47—48.
11. Lehmann H.: *Predetermination of control characteristics of half-wave self saturated magnetic amplifier*. A.I.E.E. Trans., vol. 70 cz. II, 1951 ss. 2097—2103.
12. Lipman D. A., Niegniewickij I. B.: *K teorii idealnowo drosselnowo magnitnowo usilitelia*. Elektricestwo, Nr 1/1956, ss. 8—16.
13. Lord H. W.: *The influence of magnetic amplifier cicuitry upon the operating hysteresis-loops*. A.I.E.E. Trans., vol. 172, cz. I, 1953, ss. 721—728.
14. Ładziński R.: *Właściwości statyczne i dynamiczne podstawowych układów wzmacniaczy magnetycznych*. Praca kandydacka, Pol. Warsz. 1956.
15. Menyuk N., Goodenough J. B.: *Magnetic materials for digital computer components*. Journ. of Appl. Phys., vol. 126, Nr 1/1955 ss. 8—18 oraz Nr 6/1955 ss. 692—697.
16. Nowacki P. J.: *Obliczanie nieliniowych obwodów elektrycznych i magnetycznych*. P.W.N. 1959.
17. Papoulis A., Chen T. C.: *Domain theory in core switching*. Proceedings of the symposium on the role of solid state phenomena in electric circuits. Interscience Publishers 1957, ss. 197—232.
18. Poliwanow K. M.: *Ferromagnetiki*. Gosenergoizdat. 1957.
19. Ramey R. A.: *On the mechanics of magnetic amplifier operation*. A.I.E.E. Trans., vol. 70, cz. II, 1951 ss. 1214—1223.
20. Roberts R. W.: *Magnetic characteristics pertinent to the operation of cores in self saturating magnetic amplifiers*. A.I.E.E. Trans., vol. 73, cz. I, 1954, ss. 682—689.

21. Roberts R. W., Horstman C. C.: *Core tester simplifies ferroamplifier design*. Electronics. August 1957 ss. 150—153.
22. Rodbell D. S., Bean C. P.: *Influence of pulsed magnetic fields on the reversal of magnetization in square-loop metallic tapes*. Journ. of Appl. Phys. vol. 26, Nr 11/1955 ss. 1318—1323.
23. Sands E. A.: *The behavior of rectangular hysteresis loop-magnetic materials under current pulse conditions*. Proc. I.R.E. vol. 40/1952, ss. 1246—1252.
24. Smoliński A.: *Wielkości charakteryzujące materiały magnetyczne*. Zesz. Nauk. Polit. Warsz. Elektryka Nr 2153, ss. 3—20.
25. Smoliński A.: *Metody pomiarów własności materiałów magnetycznych*. Zesz. Nauk. Polit. Warsz. Elektryka Nr 4/54 ss. 45—72.
26. Storm H. F.: *Magnetic amplifiers*. John Wiley 1955.
27. Williams H., Shockley W., Kittel C.: *Study of propagation velocity of a ferromagnetic domain boundary*. Phys. Rev., vol. 80, Nr 12/1950, ss. 1090—1094.
28. Wolman W., Kaden H.: *Über die Wirbelstromverzögerung magnetischer Schaltvorgänge*. ZS. f. Techn. Phys. Bd. 13, 1932 ss. 330—335.

ДИНАМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ФЕРРОМАГНИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ С ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЕТЛЕЙ ГИСТЕРЕЗИСА

В статье приведен новый метод оценки динамических свойств ферромагнитных материалов с прямоугольной петлей гистерезиса. Исследованы зависимости между приращением магнитной индукции ΔB и электрическим магнетизирующим зарядом s . Заряд s определен как интеграл по времени (при постоянном времени намагничивания τ) разности намагничивающего (Ht) и коэрцитивного (H_c) полей. Исследуется процесс перемагничивания начинающийся от состояния насыщения.

Опытным путем получены зависимости $\Delta B = \varphi(s)$ для металлических и ферритовых сердечников с прямоугольной петлей гистерезиса. Главным характерным свойством функции $\Delta B = \varphi(s)$ является ее независимость от значения активного сопротивления намагничивающего контура. Таким образом семейство характеристик $\Delta B = \varphi(s)$ определяет однозначно динамические свойства сердечника.

Предельные графики (для $\tau \rightarrow 0$) функции $\Delta B = \varphi(s)$ в значительной степени сходны с вычисленными методом Вольмана и Кадена [23] для металлических магнитных материалов) и при применении интерпретации Георги [4] модели ротационного намагничивания. В этом последнем случае сходство теории с опытом касается преимущественно количественных соотношений.

Физическая дискуссия зависимостей полученных опытным путем ведет к заключению, что в диапазоне относительно слабых полей основным действующим фактором является неоднородность движения стенок домен. Эта неоднородность в смысле принятом в настоящем труде может быть обусловлена статистическим распределением поля старта (поле выше которого происходит неотвратимое перемещение стенки), ферромагнитных домен. Условия намагничивания при помощи слабых полей характерны для работы схем магнитных усилителей с непрерывными характеристиками управления. Открытые нами законы являются новым исходным положением для анализа самонасыщающихся магнитных усилителей.

DYNAMIC PROPERTIES OF RECTANGULAR HYSTERESIS-LOOP
FERROMAGNETICS

In the paper a new method of evaluation of rectangular hysteresis-loop ferromagnetic dynamic behaviour is presented. The relationships between magnetic flux density ΔB increment and specific magnetizing electric charge (s. m. e. c.) s have been investigated. S. m. e. c. is defined as the time integral (for fixed time τ) of difference between applied field $H(t)$ and coercivity H_c . Flux reversal process initiated from the saturation state is considered.

The $\Delta B = \varphi(s)$ relationships with parameter τ for rectangular hysteresis-loop metallic tape as well as for ferrite cores have been experimentally obtained. The main feature of $\Delta B = \varphi(s)$ patterns is their independence upon the series resistance value in magnetizing circuit. Thus $\Delta B = \varphi(s)$ curves set becomes a single-valued representation of dynamic core properties.

The boundary $\Delta B = \varphi(s)$ patterns (for $\tau \rightarrow 0$) seem to be in fairly good agreement with predicted by Wolman and Kaden [28] method (for metallic tape cores) and by Gyorgy's [4] interpretation of rotational flux reversal model (for ferrites). In the last case, however, the agreement is rather qualitative.

Physical discussion of experimentally obtained characteristics leads to the recognition that within relatively weak field (near H_c) range the nonuniformity of domain wall motions is predominant. The nonuniformity in the sense used may be attributed mainly to statistical distribution of starting field (the field beyond which the irreversible domain wall motion occurs) of ferromagnetic domains. This weak field behaviour has a particular importance for magnetic amplifier circuits operation. The regularities here discovered yield a new starting point to self saturating magnetic amplifiers analysis.

535.215.4:621.315.592.2:669.783

J. ŚWIDERSKI

Zastosowanie zjawiska fotowoltaicznego do badania jednorodności germanu

Rękopis dostarczono 2. 9. 1960

W pracy opisano metodę badania jednorodności germanu polegającą na pomiarze objętościowej siły fotoelektromotorycznej. Podano podstawowe wzory matematyczne wyprowadzone przez Taucę oraz Łaszkariewa i Romanowa i przedyskutowano zakres ich zastosowania. Opisano układy pomiarowe oraz szereg praktycznych przykładów badania jednorodności monokryształów germanu i niewielkich próbek germanowych przeznaczonych do budowy elementów.

1. WSTĘP

Zjawiskiem fotowoltaicznym nazywamy powstawanie napięcia elektrycznego między dwoma zaciskami doprowadzonymi do półprzewodnika, który otrzymuje energię promieniowania widzialnego lub podczerwonego. Zachodzi ono wówczas, gdy poddany promieniowaniu półprzewodnik nie jest całkowicie jednorodny. W zależności od rodzaju niejednorodności powodujących powstanie zjawiska rozróżniamy (wg Taucy [17]):

1) zjawiska fotowoltaiczne kontaktowo-barierowe — gdy mamy do czynienia z prostującymi stykami metal-półprzewodnik, jak np. w ostrzowych fotodiodach germanowych, w fotokomórkach miedziowych z prostującą barierą (wg teorii Motta [12]) itp.

2) kontaktowe niebarierowe — na nieprostujących stykach metalu z półprzewodnikiem — zjawisko Dembera [2], zjawiska obserwowane na nieprostujących kontaktach z Cu_2O przez Łaszkariewa i Kosonogowe [10] itp.

3) zjawiska fotowoltaiczne niekontaktowe-barierowe występujące na przejściach p - n oraz

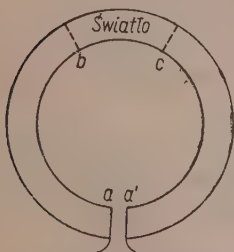
4) niekontaktowe-niebarierowe, czyli objętościowe, powstające wewnątrz półprzewodnika jednego typu przewodnictwa na skutek istnienia gradientu koncentracji nośników prądu [10], [17], [20]; do tej samej grupy można by jeszcze zaliczyć zjawiska pokrewne, jak objętościowe zjawisko termo-fotowoltaiczne [18] i objętościowe zjawiska piezofotowoltaiczne [19].

Powstawanie napięcia fotoelektrycznego w niejednorodnym półprzewodniku można wykorzystać do badania jego niejednorodności. Niniejsza praca poświęcona jest badaniu niejednorodności w germanie przez pomiar objętościowego zjawiska fotowoltaicznego oraz, częściowo, przez pomiar napięcia fotoelektrycznego występującego na przejściu $p-n$. To ostatnie zostało zastosowane jedynie do lokalizacji przejść i teoria jego powstawania nie będzie tu bliżej rozpatrywana; zapoznać się z nią można np. z artykułu Tauc [16].

2. TEORIA OBJĘTOŚCIOWEGO ZJAWISKA FOTOWOLTAICZNEGO

Światło padające na próbkę półprzewodnikową (dla germanu poniższe rozważanie jest słuszne przy temperaturze pokojowej) dostarcza energii potrzebnej do przeniesienia pewnej ilości elektronów, znajdujących się w podstawowym pasmie energetycznym (schemat Willsona Motta) do pasma przewodnictwa. Powstające w ten sposób nośniki są generowane w różnej odległości od powierzchni, w zależności od głębokości wnikania fotonów, a więc od długości fali świetlnej. Jeśli w germanie istnieje pewien gradient koncentracji nośników prądu, wywołany np. nierównomiernym rozkładem zjonizowanych domieszek, to w stanie ustalonym, bez działania czynników zewnętrznych (napięcie, światło, ciepło) utrzymuje się równowaga między przemieszczeniem się ładunku pod wpływem wewnętrznego pola elektrycznego F_0 (przy przewodności σ_r prąd wynosi $\sigma_r \cdot F_0$) a prądem odpowiadającym dyfuzji nośników (proporcjonalnym do gradientu ich koncentracji). Wprowadzenie na pewnej przestrzeni nośników dodatkowych zwiększa przewodność o wartość $\Delta\sigma$, a więc i prąd wywołany polem F_0 .

Aby przywrócić równowagę ($I_{wyp}=0$) należy pole to zmniejszyć przyłożonym z zewnątrz napięciem, które będzie miarą rozpatrywanego zjawiska, zwanego objętościowym zjawiskiem fotowoltaicznym.



Rys. 1. Pierścień półprzewodnikowy rozpatrywany w teorii Tauc.

Teorię objętościowego zjawiska fotowoltaicznego podali niezależnie Tauc [17] oraz Łaszkariew i Romanow [10]. Poniżej podano tę część ich rozważań, która jest niezbędna przy zastosowaniach tego zjawiska do badania germanu.

Tauc rozpatruje pierścień półprzewodnika jak na rys. 1. Odcinek bc jest oświetlony, do punktów zaś a i a^1 (o jednakowej przewodności, temperaturze itp.) doprowadzono napięcie kompensujące. Dodatkowo zakłada się, że:

1) odległości $a-b$ i a^1-c znacznie większe od drogi dyfuzji generowanych nośników;

2) padające światło jest absorbowane tak, że nie rozchodzi się od miejsca podania do kontaktów a a^1 ;

3) ilość absorbowanych fotonów w jednostce objętości jest stała (grubość półprzewodnika mała wobec odwrotności stałej pochłaniania, albo duża droga dyfuzji);

4) jeden absorbowany foton generuje jedną parę elektron-dziura;

5) koncentracja nośników pod wpływem oświetlenia wzrasta o stałą (w czasie i wzdłuż odcinka $b-c$) wartość;

6) wewnątrz półprzewodnika pole dostatecznie słabe.

Przy spełnionych powyższych założeniach można zastosować równania opisujące ruch elektronów i dziur w półprzewodnikach dla stanu stacjonarnego (gdy $\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial t} = 0$) wyprowadzone na podstawie statystyki klasycznej:

$$\frac{d}{dx} I_p = -\frac{d}{dx} I_n = -\frac{e \Delta n}{\tau} + e g_f$$

$$I_p = e \mu_p \left(p \cdot F - \frac{kT}{e} \frac{dp}{dx} \right)$$

$$I_n = e \mu_n \left(n \cdot F + \frac{kT}{e} \frac{dn}{dx} \right)$$

$$p = p_r + \Delta n \quad n = n_r + \Delta n$$

I_p — gęstość prądu dziurowego [A/cm^2],

I_n — „ „ elektronowego [A/cm^2],

k — stała Boltzmanna ($1,38 \cdot 10^{-23}$ VA sek/stop),

$\mu_n(\mu_p)$ — ruchliwość elektronów (dziur) [$cm^2/Vsek$],

$n(p)$ — koncentracja elektronów (dziur) [cm^{-3}],

$n_r(p_r)$ — koncentracja elektronów (dziur) bez oświetlenia [cm^{-3}],

Δn — przyrost koncentracji elektronów (równy przyrostowi koncentracji dziur) pod wpływem oświetlenia [cm^{-3}],

F — pole elektryczne [V/cm],

g_f — liczba elektronów i dziur powstających pod wpływem oświetlenia w $1 cm^3$ w ciągu 1 sek [$cm^{-3} sek^{-1}$],

x — współrzędna bieżąca [cm],

τ — średni czas życia elektronów (dziur) [sek],

T — temperatura absolutna [$^{\circ}K$].

Korzystając z tego, iż przy pomiarze kompensacyjnym powstającej pod wpływem oświetlenia siły elektromotorycznej $I = I_p + I_n = 0$ i wyznaczając kolejno pole elektryczne i napięcie

$$u = \oint F dx$$

oraz stosując przekształcenia

$$\sigma_r = \frac{1}{e_r} = e\mu_n n_r + e\mu_p p_r$$

$$\Delta\sigma = e(\mu_n + \mu_p) \Delta n$$

$$n_r \cdot p_r = n_i^2$$

$$\frac{1}{n_r} = \frac{dn_r}{dx} + \frac{1}{p_r} \frac{dp_r}{dx} = 0$$

gdzie:

- $e_r(\sigma_r)$ — oporność (przewodność) właściwa bez oświetlenia;
- $\Delta\sigma$ — przyrost przewodności pod wpływem oświetlenia;
- n_i — koncentracja elektronów (równa koncentracji dziur) w samodzielnym półprzewodniku [cm^{-3}].

Tauc otrzymuje na napięcie kompensujące wzór następujący:

$$u = -\frac{kT}{e} \left[\int \frac{\sigma_r}{\sigma_r + \Delta\sigma} \cdot \frac{1}{n_r} \cdot \frac{dn_r}{dx} dx + \frac{\mu_n - \mu_p}{\mu_n + \mu_p} \int \frac{1}{\sigma_r + \Delta\sigma} \frac{d\Delta\sigma}{dx} dx \right]. \quad (1)$$

W otrzymanych poniżej równaniach napięcie fotoelektryczne jest funkcją rozkładu koncentracji nośników prądu i stosunku ruchliwości elektronów do ruchliwości dziur. W zakresie oświetlenia, przy którym napięcie fotoelektryczne jest funkcją przyrostu przewodności właściwej, zależy ono także od czasu życia mniejszościowych nośników prądu.

Jeśli można zrobić następujące założenia:

- a) półprzewodnik typu n spełnia zależności $n_r \gg p_r$ i $\frac{dn_r}{dx} \gg \frac{dp_r}{dx}$

(lub analogiczne dla półprzewodnika typu p)

- b) obszar oświetlony dostatecznie duży wobec drogi dyfuzji

- c) w obszarze oświetlonym można przewodność przybliżyć funkcją liniową: $\sigma_r = \sigma_{r0} + cx$ gdzie $c = \text{const}$

to równanie (1) daje się uprościć do postaci

$$u = -\frac{kT}{e} \frac{2}{\frac{\mu_n}{\mu_p} + 1} \ln \frac{1 + \frac{\Delta\sigma}{\sigma_{rc}}}{1 + \frac{\Delta\sigma}{\sigma_{rb}}} \quad (2)$$

gdzie σ_{rb} i σ_{rc} — przewodność właściwa w punktach b i c .

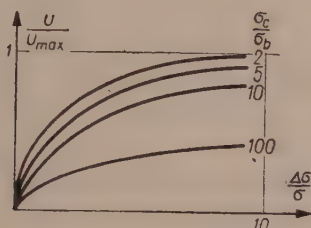
Prowadząc dalej dyskusję równania (2) ze względu na wielkość $\Delta\sigma$ (przebieg ten naniesiony jest wg Tauc na rys. 2) otrzymamy dla $\Delta\sigma \ll \sigma_r$

$$u = -\frac{kT}{e} \frac{2}{\frac{\mu_r}{\mu_p} + 1} \Delta\sigma (e_{rc} - e_{rb}) \quad (3)$$

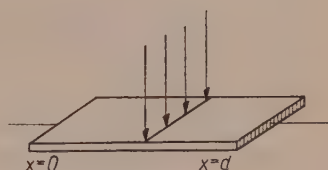
a dla $\Delta\sigma \gg \sigma_r$ (przy nasyceniu)

$$u_{max} = - \frac{kT}{e} \frac{2}{\frac{\mu_n}{\mu_p} + 1} \ln \frac{\sigma_{rb}}{\sigma_{rc}} \quad (4)$$

Ze wzoru (4) wypływa ważny wniosek, że przy dostatecznie dużym oświetleniu wartość objętościowego napięcia fotoelektrycznego zależy tylko od logarytmu stosunku przewodności na początku i końcu oświetlonej drogi. Ponieważ σ_r jest proporcjonalna do n_r , a n_r do wyrażenia $e^{\xi/kT}$, przeto maksymalne objętościowe napięcie fotoelektryczne jest proporcjo-



Rys. 2. Zależność napięcia fotoelektrycznego od przyrostu przewodności właściwej pod wpływem oświetlenia. Parametrem jest stosunek przewodności na początku i końcu oświetlonej drogi.



Rys. 3. Sposób oświetlenia próbki półprzewodnikowej rozpatrywanej w teorii Łaszkariewa-Romanowa.

nalne do różnicy odległości dna pasma przewodnictwa od poziomu Fermiego ξ w punktach b i c.

Gdy warunki powstawania zjawiska fotowoltaicznego pozwalają na opisywanie go równaniami (3) lub (4), rozkład napięcia fotoelektrycznego daje się łatwo porównywać z rozkładem oporności właściwej badanej próbki, co pozwala na stosunkowo proste kontrolowanie doświadczalne założeń teoretycznych.

Łaszkariew i Romanow [16] w rozważaniach nad objętościowym zjawiskiem fotowoltaicznym wyszli z założeń odmiennych. Rozpatrzyli oni mianowicie próbkę półprzewodnikową jak na rys. 3 oświetloną plamką o wymiarach (w kierunku elektrod) pomijalnie małych wobec drogi dyfuzji nośników mniejszościowych. Opierając się na wyprowadzonym poprzednio przez Łaszkariewa [8] ogólnym równaniu siły fotoelektrycznej

$$\varepsilon = \int_0^d i(x) \varrho(x) dx$$

i przyjmując następujące założenia:

1. odległości $0-l$ i $l-d$ znacznie większe od drogi dyfuzji;
2. grubość płytki nie przewyższająca znacznie drogi dyfuzji;
3. parametry materiałowe (np. ruchliwości μ , czas życia τ) niezależne od oświetlenia (oświetlenie dostatecznie małe);
4. droga dyfuzji L_D mało zmienia się pod wpływem pola elektrycznego związanego z gradientem koncentracji nośników prądu;
5. L_D mało zmienia się na odległościach rzędu L_D , autorzy wyprowadzili ogólne wyrażenie na objętościową siłę fotoelektryczną:

$$\varepsilon(x) = \frac{e\kappa}{s} \int_0^\infty e^{-p\eta} \cdot \frac{1}{2} [\varrho(x+\eta) - \varrho(x-\eta)] d\eta \quad (5)$$

gdzie:

x — współrzędna sondy świetlnej [cm],

η — odległość od sondy [cm],

$p = L_D^{-1}$ [cm⁻¹],

κ — liczba nośników generowanych przez sondę w ciągu 1 sek.,

s — powierzchnia poprzecznego przekroju próbki [cm²].

Jeżeli $\varrho(x)$ jest funkcją dostatecznie regularną, a

$$\frac{d\varrho}{dx} \gg \frac{1}{p^{2(n-1)}} \left| \frac{d^{(2n-1)}\varrho}{dx^{(2n-1)}} \right| \quad \text{gdzie } n > 1$$

równanie (5) sprowadza się do postaci

$$\varepsilon(x) = \frac{e\kappa}{s} L_D^2 \frac{d\varrho}{dx}. \quad (6)$$

Równanie to zostało następnie przez autorów potwierdzone doświadczalnie.

W przypadku germanu w temperaturze ok. 300°K obie te teorie dają wyniki identyczne (równanie (3) można sprowadzić do (6)). Równanie Łaszkariewa i Romanowa jest szczególnie wygodne przy stosowaniu plamek świetlnych, których wymiar w kierunku zmian koncentracji jest mały w porównaniu z tymi zmianami (i oczywiście mały w porównaniu z drogą dyfuzji). W pozostałych przypadkach, a zwłaszcza przy silnym oświetleniu (gdy $\Delta\sigma$ staje się porównywalna lub większa od σ_r a wzrost napięcia z oświetleniem jest wolniejszy niż liniowy) należy stosować równanie wyprowadzone przez Tauc'a.

Zarówno teoria Tauc'a, jak i teoria Łaszkariewa i Romanowa są wyprowadzone przy założeniu słabych wewnętrznych pól elektrycznych. W przypadku silnych pól elektrycznych mamy do czynienia ze zjawiskiem barierowym które przebiega według teorii opracowanych dla przejść $p-n$ przez licznych autorów [1], [4], [6], [16]. Z fizycznego punktu

widzenia nie ma między tymi zjawiskami (objętościowym i barierowym) zasadniczo rozdziału. Matematyczne opracowanie obu tych zjawisk różni się od siebie głównie tym, że w barierze można, ze względu na jej małą grubość, zaniedbać rekombinację elektronów i dziur. Zakładając wykładniczy przebieg koncentracji atomów domieszkowych, co ma miejsce w próbkach otrzymanych w wyniku najczęściej stosowanych procesów technologicznych (patrz np. [7] i [14]) dla określonego typu półprzewodnika i słabego oświetlenia równanie zjawiska fotowoltaicznego przy dowolnej wartości gradientu koncentracji wyprowadził Krempasky [5].

3. ZASTOSOWANIE BADANIA ZJAWISK FOTOWOLTAICZNYCH

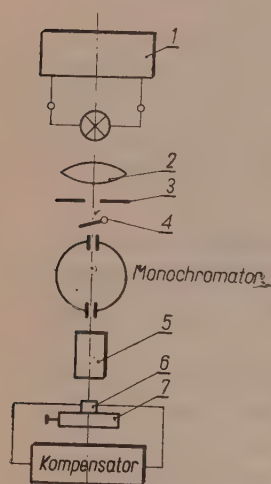
Badanie przebiegu objętościowego zjawiska fotowoltaicznego w germanie pozwala na znaczne rozszerzenie możliwości poznania jego poszczególnych właściwości. Daje ono zaskakująco dobre rezultaty w stosunku do prostoty użytych metod i nakładu pracy. W obecnym stadium badań można stwierdzić, że szczególnie przydatne jest stosowanie go w następujących przypadkach, gdy

- 1) mierzącemu zależy na szybkim orientacyjnym sprawdzeniu przebiegu oporności na dużych kawałkach germanu (monokryształach, pałeczkach otrzymanych w wyniku oczyszczania metodą topienia strefowego itd.);
- 2) zachodzi potrzeba oceny stopnia jednorodności próbki, w której zmiany oporności właściwej są zbyt małe, aby były mierzalne klasycznymi metodami (sondą dwu lub czteropunktową);
- 3) należy wykryć w dużej próbce o stałej lub mało zmieniającej się oporności właściwej niewielkie obszary o dużej zmienności;
- 4) zachodzi potrzeba zdjęcia dokładnego planu rozkładu oporności właściwej;
- 5) badanie jednorodności metodą pomiaru oporności właściwej jest bardzo utrudnione lub niemożliwe ze względu na małe rozmiary próbki;
- 6) mierzącemu zależy na niezmiennianiu stanu powierzchni badanej próbki o małej prędkości rekombinacji powierzchniowej. Poniżej zostaną podane praktyczne metody badania rozkładu objętościowego zjawiska fotowoltaicznego i przykłady powyższych zastosowań.

4. UKŁAD POMIAROWY

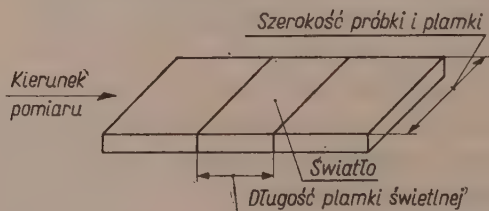
Prosty układ do badania rozkładu objętościowego zjawiska fotowoltaicznego (w układzie tym można również wyznaczyć położenie przejść $p-n$) przedstawiono na rys. 4. Źródłem światła powinna być żarówka o włóknie liniowym lub taśmowym, w przypadku gdy potrzebne są

plamki świetlne „cienkie” (rys. 3), albo żarówka projekcyjna, np. 500 watowa żarówka, gdy stosujemy oświetlenie jak na rys. 1. Idealnym „źródłem” światła jest równomiernie oświetlona szczelina odpowiedniego kształtu. Zasilaczem oznaczonym numerem 1 może być odpowiednia bateria akumulatorów lub zasilacz sieciowy o bardzo dobrej stabilizacji, aby zmiany napięcia nie wpływały praktycznie na wartość mocy promieniowanej z żarówki. Diafragma 3 ma umożliwić każdorazowo dobór odpowiedniego natężenia światła. Monochromator lub odpowiedni zestaw filtrów stosuje się w przypadku użycia promieniowania podczerwonego w zakresie $\lambda = (1,5 \div 2)\mu$. Układ optyczny ma za zadanie zapewnienie



Rys. 4. Schemat układu do badania objętościowego zjawiska fotowoltaicznego.

właściwego (dobranego do rozmiarów próbki i celu badań) kształtu plamki świetlnej. Przy badaniu próbek o kształtach regularnych prętów stosuje się plamkę świetlną (rys. 5) o szerokości równej szerokości próbki a długości zależnej od wielkości i obszaru występujących zmian koncentracji nośników prądu (im zmiany większe i bliżej siebie położone, tym rozmiar plamki w kierunku tych zmian mniejszy). Do ustalenia kształtu przejść $p-n$ lub lokalizacji dużych zmian koncentracji stosujemy plamki okrągłe, przy czym dobór średnicy jest kompromisem między zdolnością rozdzielczą a wielkością występującego napięcia. W większości przypadków napięcie jest dostatecznie dobrze mierzalne, a ograniczenia od dołu średnicy plamki są narzucane przez sam układ optyczny. Gdy kształt próbek nieregularnych znacznie odbiega od wyżej podanych, należy stosować plamki prostokątne, przy czym wymiar w kierunku prostopa-



Rys. 5. Sposób oświetlenia próbki germanowej w opisywanej metodzie.

dłym do osi wyznaczonej elektrodami musi być znacznie większy lub pokrywać całą szerokość próbki.

Układ optyczny musi też zapewniać jak największą równomierność rozkładu natężenia promieniowania w samej plamce. Zapadka 4 umożli-

wia szybkie przerwanie dopływu energii promieniowania do próbki oraz ponowne jego przywrócenie.

Układ mechaniczny zamocowania i posuwu próbki ma umożliwiać wygodne manipulowanie próbką pod nieruchomą plamką (np. można tu zastosować precyzyjny stolik mikroskopowy poruszany mikrometrycznymi śrubami) oraz doprowadzenie powstającego napięcia elektrycznego do układu pomiarowego. Występuje tu poważny problem doboru odpowiednich kontaktów do germanu. Wygodne są kontakty dociskowe, np. szczęki ołowiane, gdyż można szybko zmieniać ich położenie a i przygotowania próbki do pomiaru są przy nich dużo prostsze. Dodatkową zaletą jest bardzo małe zjawisko fotowoltaiczne na styku ołów-german, praktycznie do pominięcia (pod tym względem najlepszy jest styk dwu odpowiednio dobranych próbek germanowych); główną zaś wadą jest duża i często zmienna w czasie oporność. Praktycznie kontakty stałe, możliwe nie wprowadzające mniejszościowych nośników prądu, należy stosować przy dokładnym badaniu próbek o regularnych rozmiarach (nie wymagających do pomiaru więcej niż jedna, dwie pary odprowadzeń), w których mierzącemu nie zależy na przebiegu zjawiska w pobliżu tych doprowadzeń, kontakty ruchome (dociskowe) zaś szczególnie tam, gdzie zależy nam na czasie lub pomiarze w wielu kierunkach.

Należy jeszcze zwrócić uwagę na fakt, że kontakty stałe muszą być szczególnie starannie wykonane, gdyż często bywają one źródłem napięć galwanicznych, które mogą całkowicie uniemożliwiać pomiar objętościowej siły fotoelektromotorycznej.

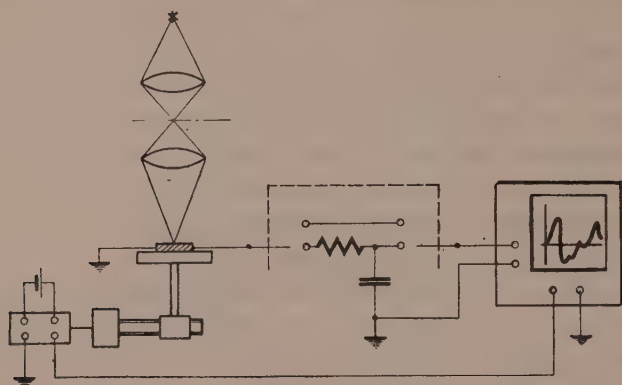
Doprowadzenia próbki, sama próbka i układ pomiarów elektrycznych powinny być dobrze osłonięte od pól elektromagnetycznych, wilgoci i zmian temperatury, gdyż wszystkie te czynniki mogą stać się przyczyną powstania w obwodzie pomiarowym sił elektromotorycznych znacznie przewyższających badaną.

Pomiar siły fotoelektromotorycznej powinien się odbywać za pomocą kompensatora. Przy stałej w czasie oporności obwodu (co może nie być spełnione np. podczas stosowania kontaktów dociskowych, przy zmiennym przekroju próbki itp.) można stosować bezpośredni pomiar galwanometrem prądu płynącego pod wpływem objętościowej siły fotoelektromotorycznej.

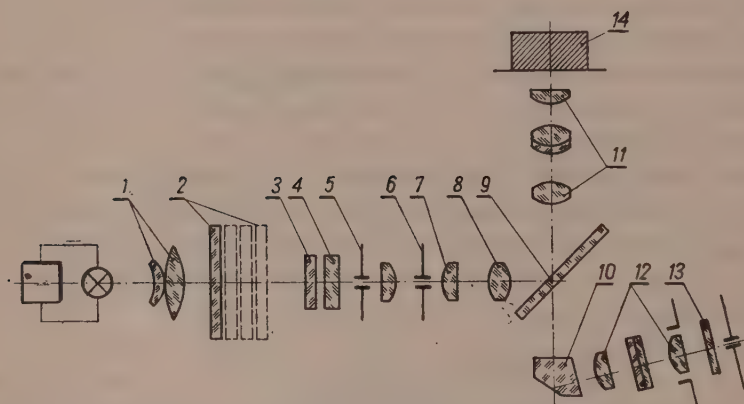
W czasie przygotowywania niniejszej pracy ukazał się komunikat Oroshnika i Many'ego [13], w którym autorzy do badania jednorodności germanu przez zastosowanie objętościowego zjawiska fotowoltaicznego użyli układu przedstawionego na rys. 6. Zasadniczym udogodnieniem jest tu wprowadzenie kompensatora samopiszącego sprzężonego z silniczkiem, który porusza stolik z badaną próbką.

Do badania rozkładu objętościowego zjawiska fotowoltaicznego, oraz

kształtu przejść $p-n$ na próbkach o bardzo małych rozmiarach stosowano z powodzeniem układ oparty na konstrukcji radzieckiego mikroskopu metalograficznego MUM-6. Wykorzystano część mikroskopu przedstawioną na rys. 7. Pomiar napięcia odbywał się tak samo, jak poprzednio.



Rys. 6. Schemat układu pomiarowego stosowanego przez Oroshnik'a i Many'ego.



Rys. 7. Schemat układu do badania objętościowego zjawiska foto-woltaicznego na próbkach o bardzo małych rozmiarach.

1 — wstępny układ soczewek skupiających; 2 — komplet filtrów; 3, 4 — układ matówek; 5 — przesłona regulująca natężenie oświetlenia; 6 — przesłona nadająca kształt plamce świetlnej; 7, 8 — układ soczewek skupiających; 9 — rozdział światła między próbkę i oko obserwatora; 10, 12, 13 — pryzmat i okular mikroskopowy; 11 — obiektyw; 14 — badana próbka.

Dla dalszego powiększenia zdolności rozdzielczej metody zastąpiono stosowaną w mikroskopie 20 watową żarówkę oświetleniową przez żarówkę projekcyjną z układu podanego na rys. 4, wprowadzono na miejsce przesłony 6 wymienną przesłonę o stałym otworze, pozwalającą na otrzy-

manie znacznie mniejszych plamek świetlnych o dowolnych kształtach, okular z podziałką, obiektyw $100\times$ i mechanizm pozwalający na przesuwanie śrubami mikrometrycznymi stolika mikroskopowego. W układzie tym możliwa jest wygodna obserwacja przesuwania się plamki świetlnej po próbce oraz pomiar jej położenia z dokładnością $\pm 0,5\mu$. Najmniejsze uzyskiwane tu plamki świetlne miały średnicę $\phi = 3\mu$.

5. WARUNKI REALIZACJI ZAŁOŻEŃ TEORETYCZNYCH

Mierzone kompensatorem (rys. 4) napięcie jest sumą napięcia fotoelektrycznego i pewnych napięć pasożytniczych, których niemal nigdy nie da się całkowicie uniknąć. Są one głównie pochodzenia termoelektrycznego (pewne różnice temperatury występujące w obwodzie) lub powstają na skutek detekcji prądów wzbudzanych polem elektromagnetycznym. Czasem źródłem ich są mikroskopijnej wielkości ogniwa galwaniczne powstałe np. przy wykonywaniu kontaktów stałych itp. Aby poznać szukaną wartość napięcia fotoelektrycznego należy często powtarzać pomiar przy zasłoniętym źródle promieniowania. Nie uniknie się w ten sposób jedynie napięć termoelektrycznych powstałych na skutek ogrzewania powierzchni germanu energią promieniowania, te napięcia są jednak praktycznie do pominięcia (we wszystkich podanych niżej przykładach zastosowań nie przekraczały one 0,01 wartości mierzonej).

A. Warunki dotyczące teorii Tauca.

Jak już wspomniano przy omawianiu teorii objętościowego zjawiska fotowoltaicznego, najłatwiejsze do interpretacji, a więc najprzydatniejsze praktycznie są wyniki uzyskane z badania przebiegu napięcia wówczas, gdy powstawanie tego napięcia daje się opisać równaniami (3) lub (6). Wtedy bowiem można je łatwo porównać z rozkładem koncentracji i czasu życia nośników prądu lub wyciągnąć o tych dwóch parametrach potrzebne wnioski.

Istotną sprawą jest więc ustalenie przy pomiarach warunków, pozwalających na spełnienie wyżej wymienionych równań. W pierwszej kolejności omówione zostaną założenia niezbędne dla spełnienia równania (3).

- 1) Odległość od zamocowania doprowadzeń do punktu pomiaru znacznie większa od drogi dyfuzji generowanych nośników.

Wpływ zamocowania doprowadzenia może być dwojaki: po pierwsze nośniki docierające do styku metal półprzewodnik mogą wywoływać kontaktowe zjawisko fotowoltaiczne, nie dające się przy pomiarze oddzielić od objętościowego; po drugie, w pobliżu doprowadzenia, mamy zwykle obszar o zwiększonej rekombinacji powierzchniowej. Pierwszego wpływu można praktycznie uniknąć przez silne zwiększenie rekombinacji powierz-

chniowej w pobliżu doprowadzeń; z drugim trzeba się liczyć jako z nieuniknionym czynnikiem zmniejszającym zjawisko i zachowywać niezbędną dla żądanej dokładności pomiaru odległość (można ją orientacyjnie wyliczyć przyjmując prędkość rekombinacji w pobliżu kontaktu za nieskończenie wielką).

2) Padające światło nie dochodzi do kontaktów.

Spełnione jest to na próbkach o powierzchni płaskiej, pozbawionej rys, dochodzących w pobliżu kontaktów, które mogą służyć jako przewodnice promieniowania. Powierzchnia próbki nie powinna też posiadać elementów mogących odbijać promieniowanie płamki na inne jej obszary.

3) Ilość absorbowanych fotonów w jednostce objętości stała (grubość półprzewodnika mała wobec odwrotności stałej pochłaniania (K) albo duża droga dyfuzji).

Dla światła białego założenie to jest dość dobrze spełnione przy grubościach rzędu jednej drogi dyfuzji, dla promieniowania podczerwonego — przy grubościach rzędu $\frac{1}{K} + L_D$. Jak zostanie wykazane przy omawianiu założeń równania (6), niespełnienie tego warunku nie powoduje dużych odchyłeń wyników doświadczalnych od przewidywanych.

4) Jeden foton absorbowany generuje jedną parę elektron-dziura.

Słuszność tego założenia została sprawdzona dla germanu w temperaturze ok. 300°K w zakresie promieniowania $\lambda = (1,0 \div 1,8)\mu$ przez Gouchera [3].

5) Koncentracja nośników wzrasta pod wpływem oświetlenia o stałą wartość (w czasie i wzdłuż odcinka oświetlonego).

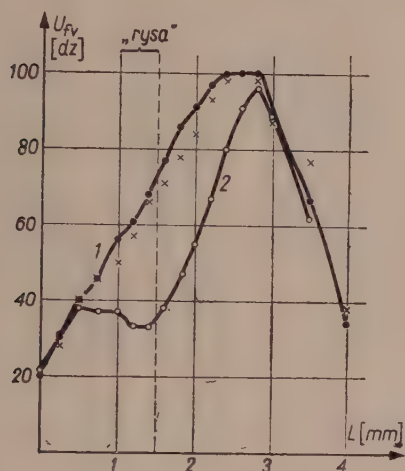
Założenie to jest w praktyce najtrudniejsze do spełnienia. Wymaga ono:

a) źródła światła o stałym w czasie natężeniu oświetlenia (odpowiedni zasilacz i czas pomiaru dostatecznie krótki, aby można było zaniedbać rozpylanie się włókna żarówki, osiadanie pyłu na przyrządach znajdujących się na drodze optycznej promieniowania itd.),

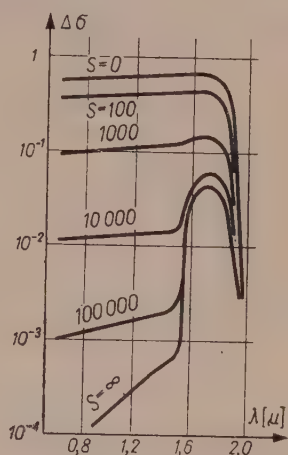
b) płamki świetlnej o stałym rozkładzie natężenia promieniowania (można to uzyskać wycinając z obrazu źródła światła sam jego środek), wreszcie

c) jednakowej powierzchni próbki badanej (stałej rekombinacji powierzchniowej, rozproszenia itp.) Wpływ zmian rekombinacji powierzchniowej można wydatnie zmniejszyć stosując promieniowanie podczerwone

o długości fali $\lambda = (1,5 \div 2,0) \mu$. Potwierdza to następujące doświadczenie, którego rezultaty przedstawiono na rys. 8. Na próbce o przebiegu napięcia fotoelektrycznego (powstałego przy oświetleniu światłem białym) przedstawionego krzywą 1 wykonano twardym narzędziem rysę, zwiększającą znacznie prędkość rekombinacji powierzchniowej. Przebieg napięcia zmienił się w sposób uwidoczniowany krzywą 2. Krzyżykami naniesiono natomiast wyniki pomiarów dokonanych już po uszkodzeniu powierzchni przy zastosowaniu promieniowania o $\lambda = (1,5 \div 2,0) \mu$. Jak widać, w tym przypadku wpływ nawet bardzo dużej zmiany prędkości



Rys. 8. Przebieg napięcia fotoelektrycznego na próbce germanowej w doświadczeniu ilustrującym wpływ prędkości rekombinacji powierzchniowej przy zastosowaniu promieniowania o różnej długości fali.



Rys. 9. Wpływ prędkości rekombinacji powierzchniowej na widmowy rozkład przyrostu fotoprzewodności (wg Tang Ting-yuana i Kao Kuo-yu [15]. Prędkość rekombinacji S podano w cm/sek.

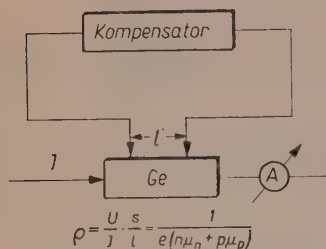
rekombinacji powierzchniowej jest niemal do pominięcia. Wpływ prędkości rekombinacji powierzchniowej na widmowy rozkład przyrostu fotoprzewodności, przedstawiony na rys. 9 wg Tang Ting-yuana i Kao Kuo-yu [15] wyjaśnia ten fakt bardzo przekonująco. Niestety, stosowanie promieniowania podczerwonego jest ograniczone trudnościami w osiągnięciu dostatecznie dużego natężenia promieniowania.

6) Dostatecznie słabe pole wewnątrz półprzewodnika.

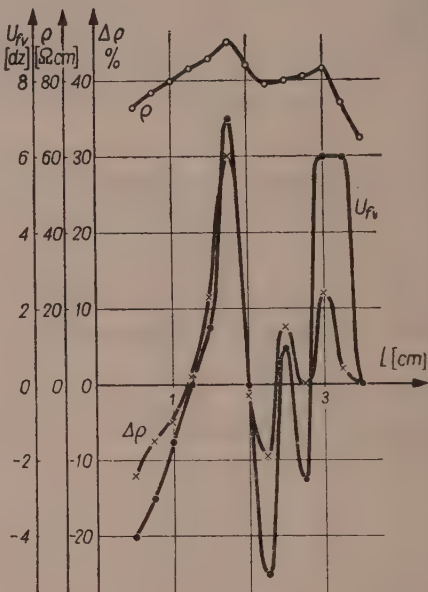
Ustalenie granicznych wartości wewnętrznego pola elektrycznego, od której począwszy równanie (3) traci swoją wartość lub wartości zeń otrzymane odbiegają o tyle a tyle procent od zmierzonych, jest bardzo trudne.

Na podstawie szeregu pomiarów ustalono, że przy wyznaczaniu przebiegu oporności właściwej z rozkładu objętościowego zjawiska fotowoltaicznego błąd wprowadzony tą drogą jest do pominięcia¹ jeszcze przy dwukrotnej zmianie wartości oporności właściwej na długości 1 mm.

Pomiary te przeprowadzono na próbkach monokrystalicznych o czasie życia nośników mniejszościowych wahającym się w granicach od 20 μ sek do 200 μ sek i oporności właściwej $\rho = (1 \div 50) \Omega$ cm. Pomiar oporności przeprowadzono przy przepływie prądu w obu kierunkach i do wykresu brano wartości średnie. W przypadku dużych gradientów oporności właściwej nie są one bezpośrednim odzwierciedleniem zmian



Rys. 10. Schemat układu do pomiaru oporności właściwej metodą sondy dwuostrzowej. — e — ładunek elementarny; $n(p)$ — koncentracja elektronów (dziur); $\mu_n(\mu_p)$ — ruchliwość elektronów (dziur). Pozostałe oznaczenia w tekście.



Rys. 11. Przebieg pozornych wartości oporności właściwej, napięcia fotoelektrycznego i $\Delta \rho$ na próbce zawierającej duże gradienty oporności właściwej.

koncentracji nośników prądu, gdyż występuje tu zjawisko wprowadzania. Szczegółowe rozważania na ten temat można znaleźć w pracy [11].

W zakresie pól wewnętrznych większych niż to jest dopuszczalne dla spełnienia równania (3), napięcie fotoelektryczne jest również funkcją gradientu koncentracji nośników prądu, ale funkcja ta jest znacznie bardziej skomplikowana [5]. Obserwowano interesującą zgodność charakteru przebiegu tego napięcia i przebiegu pewnej wartości, występującej przy pomiarze oporności właściwej, a mianowicie różnicy między wynikami pomiaru oporności właściwej przy zmianie kierunku prądu

¹ Określenie „błąd do pominięcia” oznacza w niniejszej pracy, że maksymalny błąd wprowadzony do pomiaru przez dane zjawisko nie przekracza 0,02 wielkości mierzonej.

przepływającego przez próbkę. Wielkość ta, określona jako $\Delta\varrho$ przedstawia się więc następująco:

$$\Delta\varrho = \varrho_+ - \varrho_- = \frac{s}{l} \left(\frac{u_+}{I_+} - \frac{u_-}{I_-} \right)$$

gdzie

s — przekrój poprzeczny próbki,

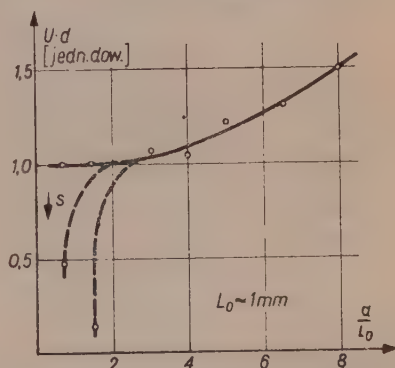
l — rozstaw ostrzy,

$U_{+(-)}$ — napięcie występujące między ostrzami przy przepływie prądu $I_{+(-)}$, z uwzględnieniem znaku.

Schemat układu do pomiaru metodą sondy dwuostrzowej przedstawiono na rys. 10, zestawienie zaś wyników pomiaru napięcia fotoelektrycznego i $\Delta\varrho$ — na rys. 11.

B) Warunki dotyczące teorii Łaszkariewa-Romanowa.

Założenia niezbędne dla spełnienia równania (6) są bardzo zbliżone do wyżej omawianych, a dotyczących równania (3). Pierwsze są identyczne. W obu teoriach musi być spełniony warunek, że odległość między obszarem badanym a zamocowaniem znacznie przewyższa długość drogi dyfuzji nośników mniejszościowych. Drugie brzmi: grubość płytki nie przewyższa znacznie drogi dyfuzji. Wychodząc z równania (6) zmierzono napięcie fotoelektryczne na kilku próbkach w funkcji ich grubości (powierzchnię mierzoną zostawiono bez zmian, a przeciwną ścierano na alundum). Wyniki na ogół do siebie zbliżone przedstawiono na przykładzie jednej próbki na rys. 12. Jak widać, równanie to jest słuszne mniej więcej do grubości równej czterem drogom dyfuzji (a więc dużo dalej, niż przewidywał teoretycznie Łaszkariew). Linie przerywane wskazują na występujące odstępstwa od równania, gdy rekombinacja powierzchniowa próbki jest zbyt duża. Stwierdzono również, że przy grubościach znacznie przewyższających drogę dyfuzji mniejszościowych nośników prądu, praktycznie już poczynając od $d = 10 L_D$ napięcie fotoelektryczne przestaje zależeć od grubości próbki. W tym przypadku przy pomiarze rozkładu objętościowego zjawiska fotowoltaicznego wzdłuż próbki o zmieniającej się oporności właściwej należy się jednak liczyć ze zwierającym działaniem dalej od powierzchni położonych warstw półprzewodnika. Rozważanie powyższe jest słuszne również w odniesieniu do równania (3).



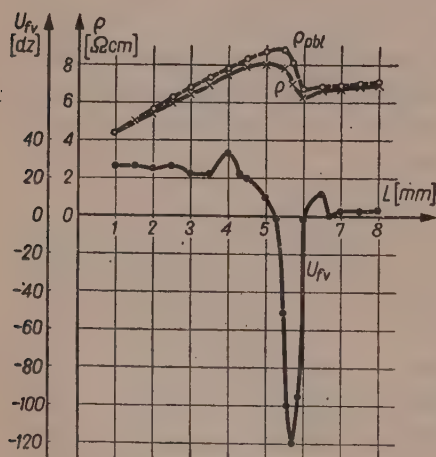
Rys. 12. Zależność objętościowego napięcia fotowoltaicznego od grubości badanej próbki.

Założenie trzecie, głoszące, że oświetlenie ma być na tyle słabe, aby nie powodowało wyraźnych zmian parametrów materiałowych, jest praktycznie spełnione, gdy przyrost przewodności pod wpływem oświetlenia $\Delta\sigma$ jest przynajmniej o połowę mniejszy niż przewodność tego obszaru nieoświetlonego.

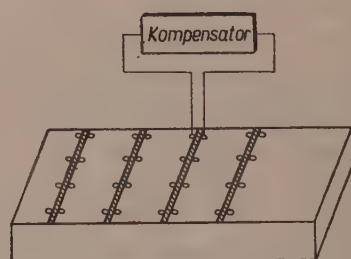
Założenia 4) i 5) są na ogół spełnione, gdy spełniony jest warunek słabych pól.

Założenia o dostatecznej regularności funkcji $\varrho(x)$ również w praktyce jest zawsze spełnione z wyjątkiem pojedynczych punktów szczytowych, które przy normalnych pomiarach nie mają znaczenia.

W rozpatrywanych równaniach mamy zawsze do czynienia z iloczynem pewnych funkcji drogi dyfuzji nośników mniejszościowych (w równaniu (3) poprzez $\Delta\sigma$) i funkcji oporności właściwej. Najczęściej zależy nam na badaniu zmian tylko jednej z tych wielkości. Gdy zmiany L_D w badanej próbce są niewielkie, w granicach od kilkunastu, do kilkudziesięciu procent, można je zaniedbać. Krzywą rozkładu napięcia foto-



Rys. 13. Porównanie wartości oporności właściwej zmierzonej metodą sondy dwuostrzowej z wartościami otrzymanymi w wyniku całkowania przebiegu napięcia fotoelektrycznego.



Rys. 14. Wzajemna konfiguracja plamki świetlnej i ostrzy sondy dwuostrzowej stosowana w przykładzie podanym na rys. 13. Obszary oświetlane zakreskowano. Kółeczka oznaczają kolejne położenia ostrzy.

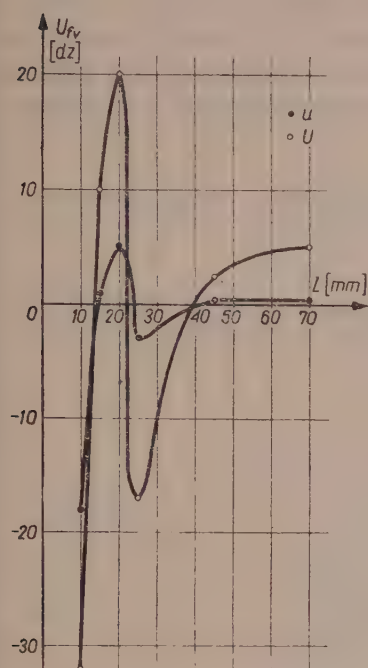
elektrycznego powstałego pod wpływem plamki jak na rys. 3, całkujemy wówczas względem drogi i uzyskujemy względny przebieg oporności właściwej. Pokrywa się on na ogół dość dobrze z otrzymanym za pomocą pomiarów sondą dwu- lub czterostrzową (przykład na rys. 13).

Dla porównania przebiegu oporności właściwej otrzymanej w wyniku pomiaru metodą sondy ostrzowej z wyliczoną z przebiegu napięcia foto-

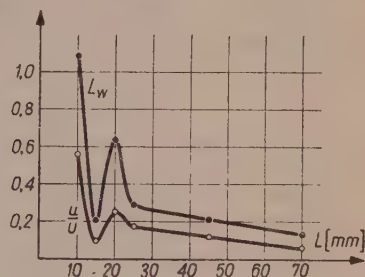
elektrycznego stosowano wzajemną konfigurację ostrzy sondy i plamki świetlnej przedstawioną na rys. 14. Wartości zmierzonej oporności właściwej podanej na wykresie są średnimi z czterech pomiarów wykonanych dla każdego położenia plamki jak na rysunku.

Przy próbkach o większych zmianach długości drogi dyfuzji nośników mniejszościowych niezbędne staje się uprzednie zmierzenie rozkładu długości drogi dyfuzji innymi metodami. Wykonano pewne doświadczenia wskazujące na to, że pomiar względnego rozkładu długości drogi dyfuzji powinien być możliwy przy wykorzystaniu samego tylko objętościowego zjawiska fotowoltaicznego. Jak wynika z równania (4) i rys. 2, przy do-

statecznie silnym oświetleniu napięcie fotoelektryczne powinno zależeć tylko od przebiegu oporności właściwej. Z równania (2) widać, iż nastąpi to wtedy, gdy stosunek przyrostu przewodności właściwej pod wpływem oświetlenia do przewodności półprzewodnika nieoświetlonego będzie znacznie większy od 1. Jednak w przypadku germanu, przy tak silnym oświe-



Rys. 15. Rozkład napięcia fotoelektrycznego wzdłuż próbki przy dwóch różnych natężeniach oświetlenia.



Rys. 16. Porównanie rozkładu wartości długości drogi dyfuzji nośników mniejszościowych zmierzonych metodą Valdes'a (L_w) z rozkładem odpowiednich stosunków napięć fotoelektrycznych, których przebieg na tej samej próbce podano na rys. 15.

tleniu pomiar staje się zupełnie niemożliwy ze względu na zjawiska termoelektryczne. Już przy znacznie mniejszych wartościach oświetlenia napięcie zaczyna rosnąć wolniej niż przyrost przewodności (rys. 2). Wykonano szereg pomiarów rozkładu napięcia fotoelektrycznego na tej samej próbce przy różnych natężeniach oświetlenia. Przy odpowiednio dobranym natężeniu otrzymuje się napięcie fotoelektryczne, którego zmiany w stosunku do napięcia fotoelektrycznego, powstałego przy słabym oświetleniu, są odwrotnie proporcjonalne do drogi dyfuzji. Np., gdy przy

słabym (spełniającym trzecie założenie (5) równania) oświetleniu w punkcie A badanej próbki uzyskano napięcie u_1 w punkcie zaś $B - u_2$, a przy pewnym silnym oświetleniu odpowiednio U_1 i U_2 , to stosunki $\frac{u_1}{U_1}$ i $\frac{u_2}{U_2}$ są

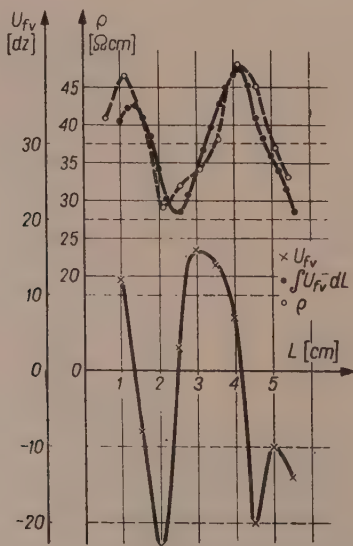
proporcjonalne do długości drogi dyfuzji nośników mniejszościowych w punktach A i B . Rezultaty takich pomiarów przytoczono na rys. 15 (wykres rozkładu napięć przy małym i pewnym dużym natężeniu oświetlenia, w podanym wyżej przykładzie u i U) i 16 (porównanie rozkładu stosunku $\frac{u}{U}$ z rozkładem drogi dyfuzji zmierzonej metodą Valdesa).

Dalsze badania w tym kierunku powinny ustalić sposób dobierania natężeń oświetlenia i wtedy można będzie zastosować tę metodę do praktycznych pomiarów, które mogą zastąpić uzupełniające pomiary drogi dyfuzji dokonywane w opisanych tu przykładach metodą Valdesa lub fotomagnetoelektryczną.

6. PRZYKŁADY ZASTOSOWAŃ BADANIA ROZKŁADU OBJĘTOŚCIOWEGO ZJAWISKA FOTOWOLTAICZNEGO

Przykład 1.

Na rys. 17 podano przykład najprostszego zastosowania pomiaru objętościowego zjawiska fotowoltaicznego. Chodziło tu o szybkie sprawdzenie



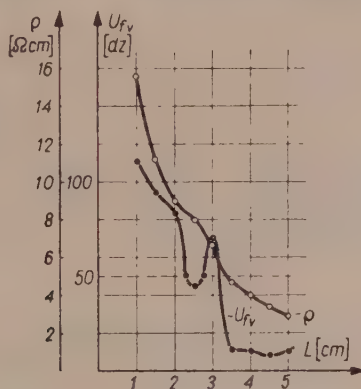
Rys. 17. Wyniki pomiaru opisanego w przykładzie 1.

nie przebiegu oporności właściwej na kawałku monokrystalicznego germanu o długości 7 cm i przekroju owalnym wahającym się w granicach

$0,9 \div 1 \text{ cm}^2$. Wytrawiono go w mieszaninie HF i HNO_3 w stosunku 50% : 50%. Zastosowano światło białe. Plamka pokrywała całą szerokość próbki, długość zaś jej wynosiła około 5 mm. Uchwyty dociskowe z ołowiu. Uzyskaną krzywą scałkowano graficznie. Wykonano jeden pomiar oporności właściwej metodą sondy czteropunktowej w celu wyznaczenia stałej całkowania. Łączny czas pomiaru (bez całkowania) — 5 min. Linia przerywana przedstawia przebieg oporności właściwej, zmierzonej później dokładnie sondą czteropunktową. Mimo słabego spełnienia szeregu założeń uzyskany rezultat można uznać za zupełnie wystarczający.

Przykład 2.

Przy celowym wprowadzaniu jednej domieszki metodą np. krystalizacji postępującej może zależeć szczególnie na wykryciu niewielkich nawet odchyłeń od zaprojektowanego rozkładu. Jak w tym przypadku przydatnym może być pomiar objętościowej siły elektromotorycznej po-



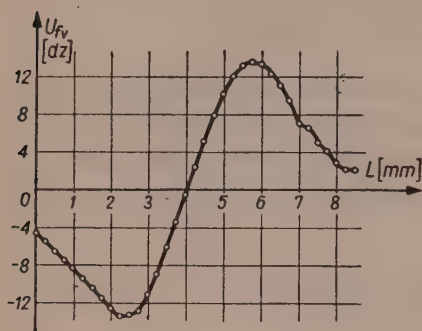
Rys. 18. Przebieg napięcia fotoelektrycznego i oporności właściwej na próbce, której badanie opisano w przykładzie 2.

kazuje rys. 18. Niewielkie zmiany w rozkładzie oporności właściwej na odcinku $L = 2 \div 3,5 \text{ cm}$ przy pomiarze metodą sondy ostrzowej mogą nawet pozostać niezauważone. Nie ma o tym mowy, gdy patrzy się na wykres napięcia fotoelektrycznego. Można stosować tu te same warunki pomiarowe co w przykładzie 1, jedynie rozmiar plamki w kierunku pomiaru powinien być mały (w opisywanym przypadku 0,5 mm), gdyż pozwoli to na wykrywanie drobnych zmian, na których w przykładzie 1-szym nie zależało.

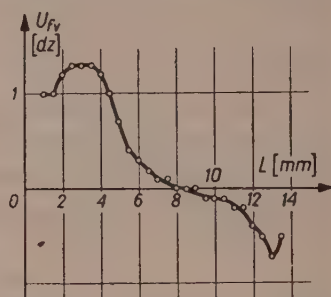
Przykład 3.

Na próbkach wyciętych w kierunku poprzecznym do osi wyciągania monokryształu wartości oporności właściwej otrzymywane przy pomiarze

metodą sondy ostrzowej są stałe (zwłaszcza w monokryształach bardzo czystych o $\rho \approx 50 \Omega\text{cm}$) lub prawie stałe. Natomiast pomiar rozkładu napięcia fotoelektrycznego wykazuje zmiany koncentracji nośników prądu związane z rozkładem zanieczyszczeń powodowanym różnicą między czasem zastygnięcia powierzchni monokryształu, a jego wnętrza. Przebieg tego napięcia może dać pewne wskazówki dotyczące symetrii jego zastygania. Na rys. 19 przedstawiono rozkład objętościowego napięcia foto-



Rys. 19. Rozkład napięcia fotoelektrycznego na próbce wyciętej prostopadłe do osi z monokryształu, w którym przy wyciąganiu stosowano ruch obrotowy.



Rys. 20. Rozkład napięcia fotoelektrycznego na próbce wyciętej tak samo, jak w przypadku przedstawionym na rys. 19, lecz z monokryształu, przy wyciąganiu którego nie stosowano ruchu obrotowego.

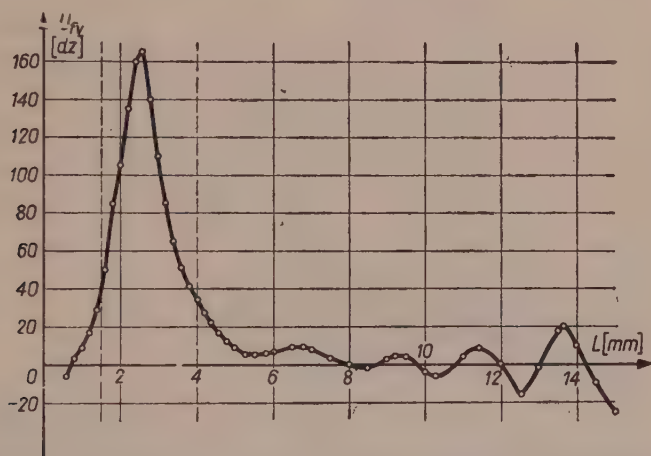
elektrycznego zmierzonego na takiej próbce wyciętej z monokryształu, w którym przy wyciąganiu stosowano ruch obrotowy, a na rys. 20 — na podobnej, lecz wyciętej z monokryształu wyciąganego bez ruchu obrotowego. Widać tu wyraźnie asymetrię względem środka próbki oraz przesunięcie wartości zerowej napięcia fotoelektrycznego odpowiadającej maksimum koncentracji zanieczyszczeń, a więc i najpóźniejszemu momentowi zastygnięcia. Przy pomiarze mającym na celu jedynie określenie ogólnego charakteru rozkładu domieszek, można stosować warunki jak w przykładzie 1. Pomiar taki można przeprowadzić nawet bezpośrednio na odpowiednim przekroju monokryształu, bez konieczności wycinania próbki prętowej o stałych rozmiarach, co jest niezbędne przy dokładniejszych badaniach.

Przykład 4.

Duże zmiany koncentracji nośników powodujące nieraz całkowitą nieprzydatność danego kawałka germanu do zastosowania w elementach półprzewodnikowych (diodach, tranzystorach itp.) mogą występować na bardzo małych obszarach monokryształu, co utrudnia wykrycie ich przy pomiarach oporności metodą sondy ostrzowej, wymaga znacznego zwięks-

szenia liczby pomiarów itp. Pomiar rozkładu napięcia fotoelektrycznego przeprowadzany w sposób ciągły (tj. taki, że plamka jest przesuwana po całym monokryształe) wyklucza możliwość pominięcia takich obszarów, gdyż charakteryzują się one tym, że powstające na nich napięcie znacznie przewyższa swą wartością napięcia, jakie powinny powstać w zakresie stosowalności teorii Tauca oraz Łaszkariewa i Romanowa. Szerzej problem ten omówiono w pracy [11].

Na rys. 21 podano przykładowy rozkład napięcia fotoelektrycznego na monokryształe zawierającym wyżej omawiany obszar w odległości $1,5 \div 4$ mm od początku wyciągania. Do możliwie dokładnej lokalizacji



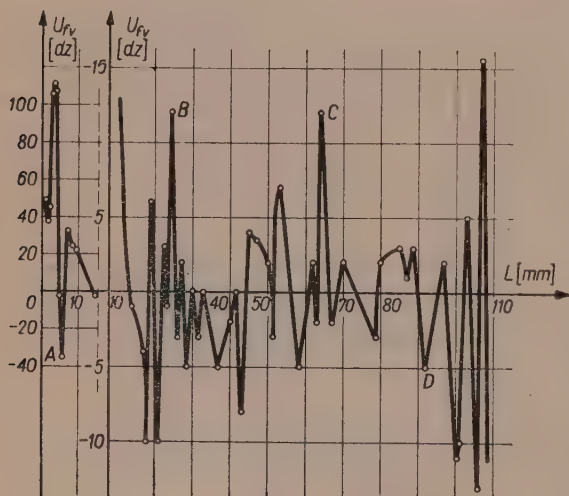
Rys. 21. Wykrywanie obszaru o dużej zmianie koncentracji nośników opisane w przykładzie 4.

tego obszaru niezbędna jest plamka o wymiarach jak najmniejszych. Pozostałe założenia, szczególnie dotyczące wymiarów próbki i natężenia światła, mogą nie być spełnione.

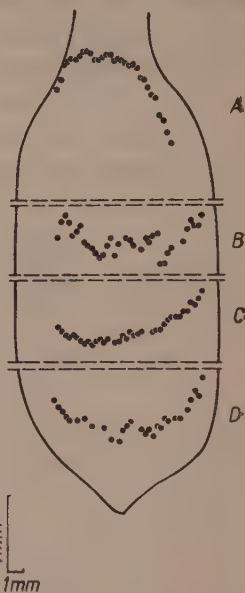
Przykład 5.

Badanie rozkładu objętościowego zjawiska fotowoltaicznego, szczególnie przy zastosowaniu plamki świetlnej punktowej, może posłużyć do wyznaczenia swego rodzaju mapy jednorodności badanej próbki. Oroshnik i Many [13] podali w swej pracy przykład otrzymanej tą metodą mapy stałych wartości oporności właściwej. Szczególnie pożytecznym może to być przy wyszukiwaniu obszarów germanu najbardziej jednorodnych. W tym przypadku należy stopniowo zwiększać średnicę plamki badającej, pamiętając o równaniu (3). Również wyznaczanie krzywych, np. maksymalnych zmian jednorodności (maksymalnych wartości napięcia fotoelektrycznego) może znaleźć ciekawe zastosowania. Na rys. 22 przedstawiono przebieg napięcia fotoelektrycznego na monokryształe

germanu, zdjęty wzdłuż jego osi wyciągania. Na rys. 23 naniesiono krzywe położenia lokalnych maksimów na płaszczyźnie monokryształu przeciętego wzdłuż osi ciągnięcia. Kształt ich ma niewątpliwie pewien związek z warunkami zastygania monokryształu, co będzie jeszcze przedmiotem dalszych badań. Krzywe przedstawione na rys. 23 zostały zdjęte przy zastosowaniu plamki świetlnej kolistej o średnicy około 0,5 mm, powierzchnia monokryształu trawiona w CP 4, kontakty dociskowe z ołowiu.



Rys. 22. Przykład przebiegu napięcia fotoelektrycznego wzdłuż osi monokryształu. Po lewej stronie przebieg na odcinku $L = 0 \div 14$ mm wykreślono w zmienionej skali. Występujące tu znacznie większe zmiany koncentracji nośników wywołane są procesem „przytapienia” zarodka.

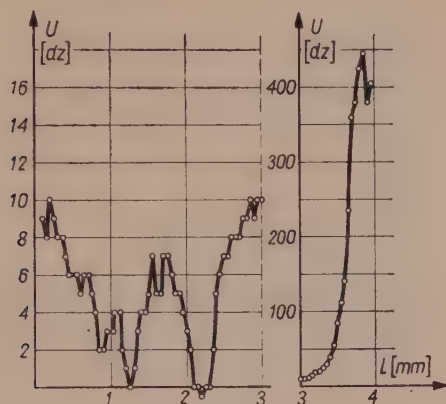


Rys. 23. Obraz rozkładu ekstremalnych wartości napięcia fotoelektrycznego na przekroju monokryształu. Litery odpowiadają wartościom wybranym z rys. 22. Zarys kształtu monokryształu ma charakter orientacyjny. Podana w lewym rogu skala odnosi się do punktów pomiarowych.

Przykład 6.

Pomiar rozkładu objętościowego zjawiska fotowoltaicznego na powierzchniach małych (praktycznie mniejszych niż 2×4 mm) przeprowadzany był z reguły w układzie podanym na rys. 7. Powinny tu być zawsze spełnione wszystkie warunki podane w założeniach. Odstępstwa od nich mogą iść w kierunku zastosowania, w pewnych przypadkach (np. do wykonywania „map” jednorodności, lokalizowania obszarów o dużej zmienności koncentracji nośników itp.), plamek punktowych oraz grubości próbek przekraczających znacznie długość drogi dyfuzji. Przy stosowaniu plamek o bardzo małych rozmiarach, rzędu paru mikronów, konieczne

jest też ze względu na bardzo małą odległość między obiektywem a próbką, aby powierzchnia tej ostatniej była możliwie płaska. Bardzo małe wymiary plamek świetlnych należy także stosować do próbek dużych, na których interesują nas zmiany zachodzące na bardzo małych odległościach. Na rys. 24 przedstawiono przebieg zjawiska fotowoltaicz-



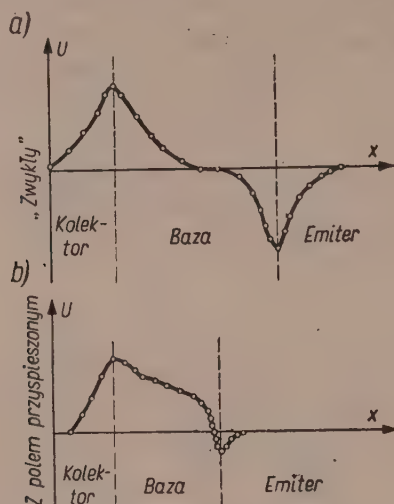
Rys. 24. Rozkład napięcia fotoelektrycznego na próbce opisanej w przykładzie 6. Dla $L = 3 \div 4$ mm zmniejszona skala.

nego na przekroju próbki, z której pod wpływem odpowiedniego podgrzania wydyfundował (rozłożony w niej poprzednio równomiernie) antymon. Asymetria przebiegu zjawiska wskazuje na asymetrię warunków technologicznych, w których ten proces zachodził i pozwala na wprowadzenie odpowiednich ulepszeń.

Przykład 7.

Na rys. 25a przedstawiono typowy rozkład zjawiska fotoelektrycznego w tranzystorze warstwowym, mierzonego na przekroju tranzystora wzdłuż osi przechodzącej przez doprowadzenie emitera i kolektora. Dwa przeciwnie skierowane maksima odpowiadają położeniu przejść $p-n$ między kolektorem i bazą oraz bazą i emiterem. Na rys. 25b przedstawiono tak samo otrzymany przebieg zjawiska, ale w tranzystorze tzw. dryftowym z wewnętrznym polem elektrycznym w obszarze bazy. Pole to przyspiesza nośniki, podobnie jak pole przejścia kolektorowego, stąd asymetria przebiegu. Zjawisko to dotąd nie posiada podbudowy matematycznej, a ze względu na niespełnienie założeń dotyczących dostatecznej odległości od przejść $p-n$ nawet wyliczenie go z bardzo skomplikowanej (dla tego zakresu wartości pól wewnętrznych) postaci równania Krempasky'ego [5] jest praktycznie niemożliwe. Mimo to jednak obserwacja jego może

nasunąć, bodaj na drodze porównawczej, pewne wskazówki dotyczące technologii tego typu tranzystorów.



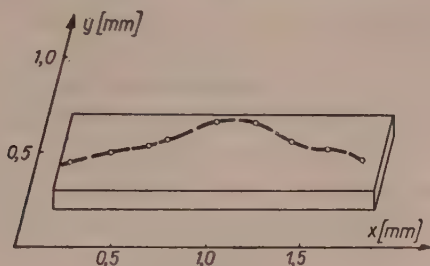
Rys. 25. Rozkład napięcia fotoelektrycznego na przekroju tranzystora stopowego zwykłego i tranzystora z wytworzonym w obszarze bazy polem przyśpieszającym.

Przykład 8.

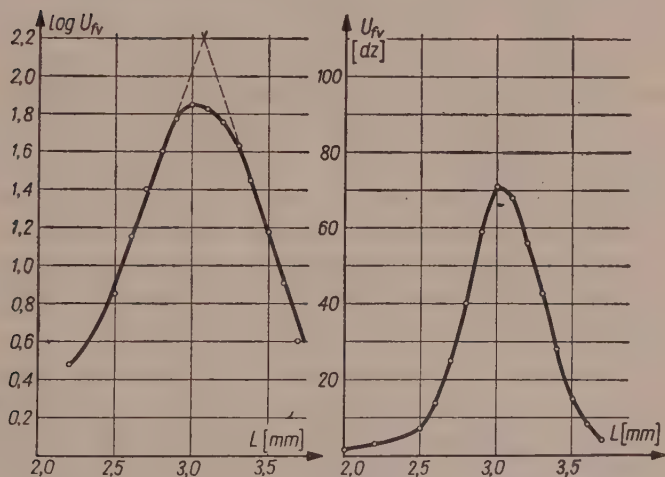
Za pomocą układu stosowanego w przykładach 6 i 7 wyznaczano także kształt przejść p - n na przekroju tranzystora lub diody, określano grubość obszaru bazy oraz głębokość położenia przejść p - n na przekrojach próbek otrzymanych w drodze dyfuzji antymonu z fazy gazowej do germanu typu p . Dokładność lokalizacji przejścia p - n tą metodą jest bardzo duża i zależy przede wszystkim od średnicy stosowanej plamki świetlnej. Porównanie tej metody lokalizacji przejścia p - n z metodami opierającymi się na procesach trawienia chemicznego oraz z metodą termosondy pozwala stwierdzić, że przy stosowaniu plamki kolistej o średnicy ca 3μ błąd określenia położenia przejścia p - n jest mniejszy niż 1μ . Najmniejsze określone tą metodą odległości wynosiły 5μ . Przy pomiarze głębokości położenia przejścia p - n w próbce otrzymanej w wyniku dyfuzji duży wpływ na błąd pomiaru ma stan (kształt) brzegu próbki, na którym obiera się punkt odniesienia. Nawet przy bardzo starannej obróbce (szlifowanie, trawienie) powierzchni przekroju kształt brzegu przeciętnie odbiega od linii prostej o więcej niż 1μ .

Wyznaczanie kształtu przejść p - n otrzymywanych metodą wyciągania (w czasie monokrystalizacji) przeprowadzano w układzie przedstawionym na rys. 4. Zasada pomiaru i dyskusja błędu jest tu ta sama, co w przy-

padku złącz występujących na małych obszarach. Uzyskany kształt pokazano przykładowo na rys. 26, przebieg zaś napięcia fotoelektrycznego na przejściu $p-n$ i w jego najbliższym otoczeniu na rys. 27. Ogólny charakter tego przebiegu jest tu oczywiście taki sam, jak przebiegów uzyskanych w wyniku pomiarów przeprowadzonych za pomocą układu



Rys. 26. Wyznaczony metodą fotoelektryczną kształt przejścia $p-n$ uzyskanego na drodze odpowiedniej zmiany prędkości wyciągania monokryształu.



Rys. 27. Przebieg napięcia fotoelektrycznego na przejściu $p-n$ i w jego najbliższym otoczeniu w skali liniowej i logarytmicznej. Proste przerywane pomagają w ścisłym wyznaczeniu położenia środka przejścia.

przedstawionego na rys. 7. W przypadku złącza płaskiego i równoległej doń linii świetlnej można opisać rozkład napięcia fotoelektrycznego ogólnie

nie znanym (patrz np. [21]) równaniem: $U(x) = U_{\max} \cdot e^{-\frac{x}{L_D}}$, gdzie

$U(x)$ — napięcie fotoelektryczne w odległości x od przejścia $p-n$ (odległość ta musi przewyższać kilkakrotnie szerokość plamki świetlnej),

U_{\max} — napięcie fotoelektryczne na przejściu p-n,

L_D — droga dyfuzji mniejszościowych nośników prądu mierzona w tych samych jednostkach, co x .

U w a g a:

Przy wykonywaniu wszelkich pomiarów zjawiska fotowoltaicznego należy zwrócić szczególną uwagę na niedoceniane zwykle niebezpieczeństwo, jakie stanowi dla wzroku przeprowadzającego te pomiary kontrast między obszarem oświetlonym, a półmrokiem panującym w jego najbliższym sąsiedztwie. Należy unikać częstego przenoszenia wzroku z miejsc słabo oświetlonych (urządzenie manipulacyjne) na obszar, na którym znajduje się plamka świetlna, a w przypadku, gdy jest to niezbędne (praca w układzie podanym na rys. 7) stosować szkła ochronne.]

7. ZAKOŃCZENIE

Przytoczone wyżej warunki techniczne i przykłady zastosowania zjawiska fotowoltaicznego do badania jednorodności germanu wskazują na celowość wykorzystania tego zjawiska jako jeszcze jednej i to dość wygodnej metody badania własności tego najpopularniejszego półprzewodnika. Pozwala ona wydatnie uzupełnić, a niekiedy zastąpić stosowane obecnie powszechnie metody badań, jak np.: pomiar oporności właściwej metodą dwu- i czterostrzową, pomiar czasu życia mniejszościowych nośników prądu, pomiar znaku siły termoelektrycznej, pomiar ruchliwości itp. Dalsze prace niewątpliwie rozszerzą jeszcze znacznie zakres jej zastosowań, a już na podstawie pierwszych prób można stwierdzić, że w najbliższym czasie będzie ją można (po pewnej modyfikacji) przystosować do badania jednorodności krzemu, a być może i innych materiałów półprzewodnikowych.

Na zakończenie pragnę gorąco podziękować mgr. inż. Z. Majewskiemu za liczne i bardzo cenne rady i wskazówki, oraz mgr S. Sikorskiemu, który ofiarował wiele swego czasu na szczegółowe przedyskutowanie założeń teoretycznych niniejszej pracy oraz przyczynił się w znacznym stopniu do skompletowania układów optycznych stosowanych w opisywanych tu doświadczeniach.

Zakład Elektroniki IPPT

WYKAZ LITERATURY

1. Dawydow W.: Techn. Phys. 9 (1936), 477.
2. Dember H.: Physik Z. 32 (1931), 554, 856.
3. Goucher F. S.: Phys. Rev. 78 (1950), 816.
4. Gubanow A. J.: ŽETF 25 (1953), 307.
5. Krempasky J.: Čes. čas. fys. 9 (1959), 487.
6. Lechovec K.: Phys. Rev. 74 (1948), 463.

7. Lord N. W.: J. Metals 5 (1953), 11.
8. Łaszkariew W. E.: ŻETF 18 (1948), 917.
9. Łaszkariew W. E.: Kosonogowa K. H.: ŻETF 16 (1946), 785; 18 (1948), 927.
10. Łaszkariew W. E., Romanow W. A.: Trudy Inst. Fiz. ANUSSR, Kijew, 7 (1956), 50.
11. Majewski Z., Sikorski S., Świdorski J.: Biul. de L'Academie Polon. des Sciences vol. VII (1959), 401.
12. Mott N. F.: Proc. Roy. Soc. (London) A 171 (1939), 281.
13. Oroshnik J., Many J.: Electrochem. Soc. 106 (1959), 360.
14. Phann W. G.: Trans. AJMME 194 (1952), 747.
15. Tang-Ting-yuan, Kao Kuo-yu: Scientia Sinica vol. VII (1958), 165.
16. Tauc J.: Čes. čas. fys. 4 (1954), 158.
17. Tauc J.: Čes. čas. fys. 5 (1955), 34.
18. Tauc J.: Čes. čas. fys. 5 (1955), 614.
19. Tauc J., Závetová M.: Čes. čas. fys. 9 (1959), 241.
20. Trousil Z.: Čes. čas. fys. 5 (1955), 34.
21. Wolska A.: Zesz. Probl. Nauki Polskiej zesz. VIII str. 271.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЯВЛЕНИЯ ВОЗНИКНОВЕНИЯ ФОТОЭЛЕКТРОДВИЖУЩЕЙ СИЛЫ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ ОДНОРОДНОСТИ ГЕРМАНИЯ

Работа посвящена исследованию однородности германия, основанного на измерении фотоэлектродвижущей силы возникающей при освещении полупроводника, в котором выступают изменения концентрации носителей тока. Когда эти изменения не особенно велики (изменения удельного сопротивления на протяжении длины диффузионного смещения неравновесных носителей тока не превышает двукратного) возникающую фотоэлектродвижущую силу можно определить по формулам предложенным Тауцем [1] и Лашкаревым и Романовым [6]. Теорию Тауца можно применить когда ширина освещенного участка велика по отношению к длине диффузионного смещения неравновесных носителей тока, а теорию Лашкарева-Романова в противном случае. Теория позволяет анализировать результаты измерений для произвольного значения интенсивности освещения, теория Лашкарева-Романова применима только при малых интенсивностях. Для определения напряжения фотоэлектродвижущей силы возникающей в участках германия с большими изменениями удельного сопротивления (с большими значениями внутренних электрических полей) следует применять уравнения выведенные Кремпаским [20], который принимает предпосылки сходные с предпосылками теории Тауца. Однако эти уравнения настолько сложны, что их практическое применение представляет значительные затруднения.

В работе приведены практические указания дающие возможность правильного избрания соответственного теоретического метода для данного конкретного случая и описан способ реализации отдельных предпосылок, при которых избранный метод позволит на получение ожидаемых результатов. Описаны также две измерительные схемы для испытания однородности германия. Одна предназначенная для испытания больших образцов (монокристаллы непосредственно после извлечения или их элементы), вторая — для малых, с поверхностями величиной одного или нескольких миллиметров. Эта вторая схема обоснованная на конструкции металлографического микроскопа МИМ 6 дает также

возможность исследований внутренних полей выступающих в транзисторах. Обе схемы можно также с успехом применять для определения формы p - n перехода в образцах соответствующей величины.

Рядом примеров доказано, что применение явления возникновения фотоэлектродвижущей силы при исследованиях однородности германия особенно выгодно, когда:

1. Необходима быстрая приблизительная проверка распределения удельного сопротивления большого образца германия.

2. Необходима оценка степени однородности образца, в которой изменения удельного сопротивления слишком малы для измерения классическими методами (например игл-зондами).

3. Следует найти небольшие участки со значительными изменениями удельного сопротивления в большем образце с мало изменяющимся удельным сопротивлением.

4. Необходимо особо тщательное исследование распределения удельного сопротивления образца.

5. Измерение удельного сопротивления игл-зондами затруднительно из-за малых размеров образца.

6. Измерение однородности следует произвести без нарушения состояния поверхности отличающейся скоростью поверхностной рекомбинации.

Приведены также следующие возможности использования измерения фотоэлектродвижущей силы:

1. Для исследования формы переходных поверхностей между твердой и жидкой фазой во время процесса монокристаллизации (путем измерения распределения концентрации носителей тока в сечении монокристалла).

2. Для исследования процесса поверхностной рекомбинации (путем измерения спектрального распределения фотоэлектродвижущей силы) и объемной рекомбинации (путем измерения фотоэлектродвижущей силы в зависимости от интенсивности освещения).

В заключение упомянуто о возможности применения описанного метода также для исследования других полупроводниковых материалов.

APPLICATION OF PHOTOVOLTAIC EFFECT TO EXAMINATION OF HOMOGENEITY OF GERMANIUM

The work is devoted to the examination of homogeneity of germanium based upon the measurement of photoelectric voltage arising in the course of the illumination of semiconductor in which the concentration changes of the current carriers are taking place.

The photoelectric voltage may be determined either by formulae derived by Tauc [1] or by Lashkarev and Romanov [6] provided the above mentioned changes are not extensive (resistivity change over a distance equal to the value of diffusion length of minority carriers not higher than twofold). Tauc theory is applicable provided the width of the illuminated region in relation to the value of diffusion length of minority carriers is considerable, whereas theory of Lashkarev-Romanov is valid just for the opposite case. With the aid of Tauc theory analysis of measurement records may be carried out for arbitrary value of the illumination intensity, whereas theory of Lashkarev-Romanov is valid for the small intensities only. To determine the photoelectric voltage arising across the regions of germa-

nium with considerable alterations of resistivity (immense electric internal fields) Krempaski's equations [20] based on the assumptions closely related to those of Tauc's theory have to be used. These equations, however, are very intricate and considerable difficulties are encountered in practice.

Some practical recommendations as to which of theoretical methods is to be applied for a particular instance, are given. How to implement each of given assumptions, so that these methods could lead to the expected results is being described. For examinations of homogeneity of germanium, actually, two measurement methods are specified; one of them applicable for the big specimens (monocrystals or their fragments directly after growing), and the other for small ones displaying the surfaces of the order of single square millimeters. The latter one based on the metallographic microscope MUM 6 can be used also for the examination of the internal fields emerging in transistors. Equally, both methods may be used successfully in shape determination of p - n junctions of appropriate dimensions.

A number of examples prove that photovoltaic effect, if used for the examination of homogeneity of germanium, is particularly valuable in following circumstances:

1. prompt, though rough estimate of the specific resistivity of germanium in big samples is required,
2. an estimate of degree of a specimen homogeneity whose resistivity is too small to be measured by conventional methods (for instance by a point-contact probe) is in quest,
3. small regions displaying considerable resistivity changes are to be discovered within a big specimen with negligibly altering resistivity,
4. a very detailed examination as to resistivity distribution within the specimen is demanded,
5. when measurement of resistivity due to the small dimensions of the specimen is rather, difficult with the point-contact method.

It has been shown how the photovoltaic effect in its application may be extended for performing other examinations:

1. examination of the shape of interface layer between solid and liquid phases in monocrystalization process (by measuring how the concentration of the current carriers within the cross-section of monocrystals is distributed),
2. examination of the surface recombination process (by measuring the spectral distribution of photoelectric voltage) and volume recombination by measurement of the photoelectric voltage in function of the illumination intensity.

At the end the possibilities of examining various others semiconducting materials by application the suggested method is mentioned.



621.382.122.2:669.783

B. MROZIEWICZ

Technology and some properties of germanium tunnel diodes

Manuscript received 25. 9. 1960.

A brief physical interpretation of diode characteristic is given. Diode performance was characterized in terms of a figure of merit, and investigations were directed to increase this value. Both p -type and n -type germanium diodes, fabricated by the alloying method, were investigated. Properties of the diodes are described and some relationships between diode parameters are presented. In particular, dependence of the diode capacitance on the bias voltage and the current-voltage characteristic at large current are discussed. The appendix describes calculation of Fermi level position and some details of the measurements.

I. INTRODUCTION

The tunnel diode is a two-terminal semiconductor device with a non linear characteristic shown in Fig. 1. This characteristic has a voltage-controlled negative resistance region arising from the tunnel effect in the p - n junction. The effect was discovered by L. Esaki when investigating field emission in very narrow p - n germanium junctions, and was described and interpreted by him in 1958 [1].

Tunnel diodes can be employed in various circuits of which oscillating, switching and amplifying circuits may be considered as the most important [see 7, 9, 13].

One of the main advantages they offer in these applications is the extremely wide range of operation frequency. The upper limit of oscillation obtained so far is of the order of 8 kHz but it is believed that it may be extended, as the technology improves, into millimetre wave range [5]. This remarkable feature results from the fact, that unlike other semiconductor devices, the tunnel diode operates on the principle of majority carrier transport. Therefore the transit time is of no importance here and frequency limitations are mainly due to the relatively large capacitance of the junction and the parasitic inductance associated with the mounting. The high frequency response of the diode results in a very short switching time of the order of 2 nsec, and this, combined with the highly nonlinear characteristic, makes the diode an excellent switch-

ing device. The low noise produced by the diode is another note-worthy feature. Although data on this subject is scanty, some tunnel diode amplifiers have been reported with the noise temperature of about 300°K [4]. One of the most impressive features of tunnel diodes is the wide range of temperatures within which the negative resistance effect can be exploited. It extends from 4,2°K to 472°K for germanium units and up to 672°K for silicon units. Significant resistance to radiation damage, greater reliability, small dimensions and a relatively simple fabrication process are other advantages of the tunnel diode.

This interesting device has, unfortunately, several drawbacks. The most important one is its two-terminal structure that makes it completely bilateral. For this reason the design of a multistage tunnel diode amplifier operating at a single frequency is a difficult problem. Power limitation is another disadvantage. It is not unlikely, however, that some of these difficulties will be overcome, at least in the microwave region where distributed circuits and travelling wave circuits may possibly be developed.

The aim of this work was to investigate some aspects of the technology and its influence on the diode properties. Both *p*-type and *n*-type germanium diodes were investigated. The dependence of some of the diode properties on the impurity concentration in the original semiconductor has already been described [2]. This work is therefore confined to one value of resistivity of *p*-type and *n*-type germanium, and attention is focussed on the technique of junction fabrication. During this investigation some unexpected characteristics of the diodes were obtained. An attempt was made to find some correlation between various diode parameters and the author hopes that his work may be useful in this respect for future investigations.

2. GENERAL CONSIDERATIONS

2.1. Physical interpretation of the tunnel diode characteristic.

The static characteristic of the tunnel diode may be considered as a superposition of two main components arising from majority carrier tunneling and majority carrier diffusion across the junction. These two current components were found from experiments (see sec. 4.1) and are shown in Fig. 1.

To analyze the tunneling component, let us assume that the *p-n* junction is formed in germanium as shown by graph of Fig. 2. In this structure, transport of the majority carriers to the opposite side of the junction by the diffusion process is prevented by the potential barrier V_B .

There is, however, a small but finite probability, that some of the majority carriers will appear on the opposite side by tunneling across the junction. The effect is similar to that described by Zener [14], and the pro-

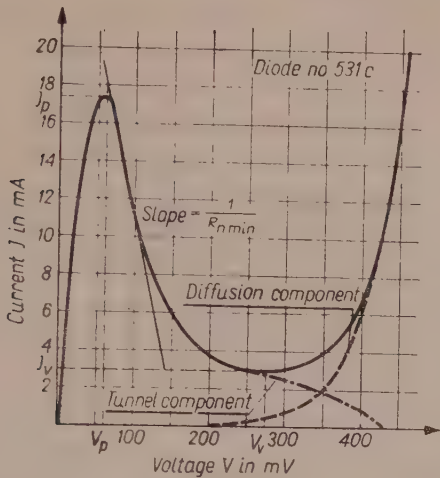


Fig. 1. D. C. characteristic of a tunnel diode, - - - - - diffusion component, tunnel component.

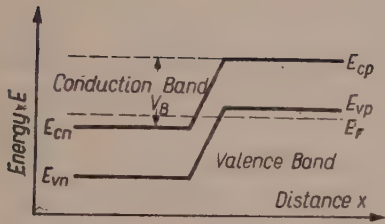


Fig. 2. Schematic energy band diagram of a p-n junction.

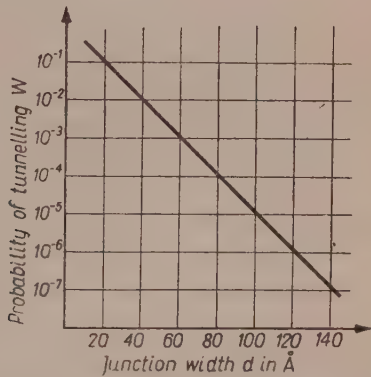


Fig. 3. Probability of tunneling by the Zener process, versus thickness of junction.

bability of tunneling can be regarded as proportional to the factor [see Fig. 3].

$$W = \exp \left[- \frac{\pi}{4} \frac{\sqrt{2m_{eff}}}{\hbar} (E_{cv})^{1/2} d \right] \quad (1)$$

where

E_{cv} = the band gap,

m_{eff} = the "conduction" effective mass,

d = width of the junction.

The process of majority carrier transport may be examined as motion of holes or electrons. For convenience, only electrons will be considered here.

According to the simple theory of tunnel effect in a p - n junction, as given by L. Esaki [1], the following assumptions are made:

1. electrons tunnel without changing their energy level,
2. electron with energy E can tunnel only in the case when an unoccupied state exists at the same energy level on the other side of the junction.

Under these assumptions, the number of electrons within energy interval dE , flowing in both directions, is expressed in the following form:

$$I_{np}(E) dE = AZ_{np} [f_n^n(E) g_n(E)] [1 - f_p^n(E) g_p(E)] dE, \quad (2)$$

$$I_{pn}(E) dE = AZ_{pn} [f_p^n(E) g_p(E)] [1 - f_n^n(E) g_n(E)] dE,$$

where:

A = some constant,

Z_{np}, Z_{pn} = probability of tunneling from n to p and p to n region respectively,

$f_n^n(E)$ = Fermi function for electrons on the side which is n -type,

$f_p^n(E)$ = Fermi function for electrons on the side which is p -type,

$g_n(E), g_p(E)$ = density of available states on n type and p type side, respectively.

Assuming that $Z_{np} = Z_{pn} = \text{constant}$, and considering boundary conditions

$$g_p(E_{vp}) = 0,$$

$$g_n(E_{cn}) = 0,$$

the total electron flow for forward bias V volts has the form:

$$I_T = AZ \int_{E_{vp}-V}^{E_{cn}} [f_n^n(E) - f_p^n(E+V)] g_n(E) g_p(E+V) dE \quad (3)$$

in this expression:

$$f_n^n(E) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{E - E_{Fn}}{kT}\right)}$$

$$f_p^n(E) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{E - E_{Fn} + V}{kT}\right)}$$

$$g_n(E) = 2 \left[2\pi \left(\frac{2m_n}{h^2} \right)^{3/2} (E - E_c)^{1/2} \right]$$

$$g_p(E) = 2 \left[2\pi \left(\frac{2m_p}{h^2} \right)^{3/2} (E_v - E - V)^{1/2} \right]$$

where:

E_{Fn} is the position of Fermi level with reference to the bottom of the conduction band in the n -type region,

m_n, m_p = "density-of-states" effective masses in the n -type and the p -type region respectively.

To calculate the function (3), the excess impurity concentration N_D and N_A on both sides of the junction should be known. In practice it is difficult to find by measurement the impurity concentration in the recrystallized side and another method is proposed here. It may be seen from (3) that the voltage V_p (Fig. 1), depends on the impurity concentration and therefore a graph $V_p = f(N_D, N_A)$ can be made. Since we can measure both the impurity concentration in the base material and the voltage V_p , the required concentration may be easily found from this graph. Using this method, the impurity concentration $6 \cdot 10^{21}$ [cm⁻³] was obtained for the experimental diode made on p -type germanium with original impurity concentration $1,2 \cdot 10^{19}$ [cm⁻³]. With these values, the tunnel current was computed and resultant curve was normalized at 0,04 volt. The agreement between the measured curve and the calculated one in the low voltage range can be regarded as excellent (Fig. 4). The value of built-in voltage, provided by the positions of Fermi levels on both sides of the junction, is of the order of 0,77 v and fits fairly well the result obtained by measurement (see Fig. 25). The theory given by Esaki fails, however, to explain the part of the I — V characteristic at larger voltages. The following reasons may be accounted for that:

a) probability of tunneling Z is not constant, but depends on bias voltage;

b) mechanism of tunneling described by assumptions 1 and 2 should be considered as a first approximation. It may be expected that there may be some energy levels in forbidden band which contribute to the transition process and probability of tunneling becomes a subject to additional energy and momentum conservation rules;

c) the structure of the energy band edges involved in transition process is much more complicated than this accepted when calculating for-

mula (3). In particular, presence of impurity levels in the forbidden band should not be neglected;

d) some modifications of the band model under applied electric fields may be expected.

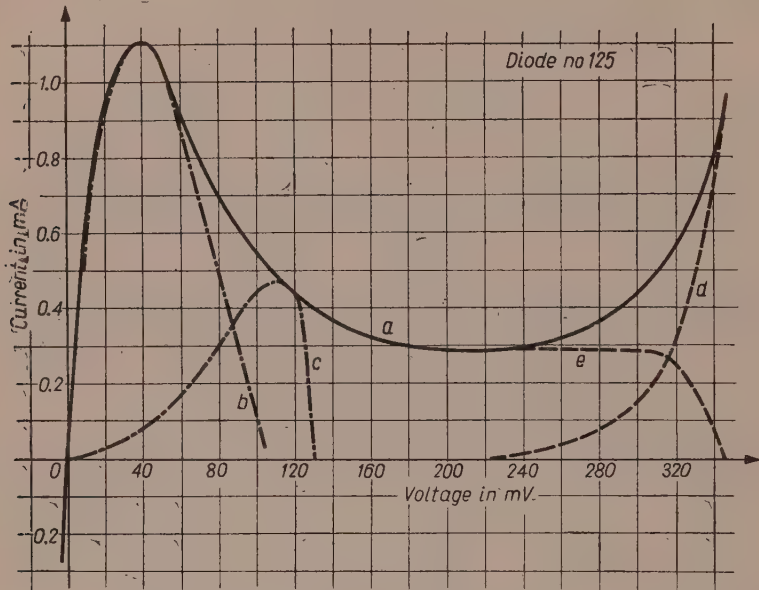


Fig. 4. Measured current-voltage characteristic of a tunnel diode, and tunnel current components found from calculations. a. Total current measured using D. C. method, b. tunnel current calculated from eqn. (3), c. "impurity" tunnel current calculated from eqn. (4), d. diffusion current found from extrapolation, e. tunnel current found by subtracting diffusion current from total current.

To estimate the contribution made by impurity levels, the following currents flowing in the forward direction and called impurity currents will be considered in analogy to (3)

$$\begin{aligned}
 I_{TI} = & A [f_n^n(E_D) - f_p^n(E_D)] g_p(E_D) N_D \\
 & + A [f_n^n(E_A) - f_p^n(E_A)] g_n(E_A) N_A \\
 & + A [f_n^n(E_{D=A}) - f_p^n(E_{D=A})] N_D N_A
 \end{aligned} \quad (4)$$

where

$$f_n^n(E_D) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \exp \left(\frac{-E_D - E_{Fn}}{kT} \right)}$$

$$f_p^n(E_D) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{-E_D - E_{Fn} + V}{kT}\right)}$$

$$f_n^n(E_A) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{E_A - E_{Fp} - V}{kT}\right)}$$

$E_{D=A}$ denotes energy at which acceptor and donor levels are opposite each other.

In order to calculate expression (4) the assumption was made that donors and acceptors occupy single levels at a distance 0,01 eV from the bottom of the conduction band and the top of the valence band, respectively. This assumption should be regarded as a rough approximation since it is believed that the activation energy disappears in a degenerate semiconductor, although no theoretical function has been given. The values of the first term, which dominates in our case, normalized to the measured characteristics at the voltage 0,12 V have been plotted in Fig. 4. The agreement is not very satisfactory, anyhow it shows that the contribution of impurity levels cannot be neglected in the analysis of the tunnel current characteristics.

2.2. Requirements for the junction

We proceed now to determine the technological requirements for the junction, associated with the negative resistance characteristic. These can be found from the considerations of the previous section and are as follows:

1. the junction must be sufficiently thin to keep the probability of tunneling high (1),
2. there must be electrons on one side of the junction and empty states on the other side.

To examine the first condition, an ideal abrupt junction will be assumed, with the impurity distribution described by the following formula:

$$\begin{aligned} N_D(x) - N_A(x) &= N_D & x < 0 \\ N_D(x) - N_A(x) &= -N_A & x > 0 \end{aligned} \quad (5)$$

where N_A and N_D are the concentrations of acceptors and donors respectively.

Formula for the width of such a junction has been derived elsewhere [see 10]

$$d = \sqrt{\frac{\epsilon}{2\pi e} \frac{N_D + N_A}{N_D N_A} (V_B - V)} \quad (6)$$

We shall see in section 4.3 that this formula does not hold well for tunnel diodes, but it can be used here as a first approximation. Let us consider the case when

$$N_D = N_A \quad \text{and} \quad V_B = E_{cv}$$

then

$$d = \sqrt{\frac{\epsilon}{\pi e} (V_B - V)} \frac{1}{\sqrt{N_D}} \quad (7)$$

The dependence of the transition probability on the impurity concentration can now be estimated by substituting (7) into (1)

$$W = \exp \left[-\frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{2m_{eff}}{\hbar^2} \frac{\epsilon}{\pi e} E_{cv} \frac{1}{\sqrt{N_D}}} \right] \quad (8)$$

This expression was plotted in fig. (5) and shows that the transition

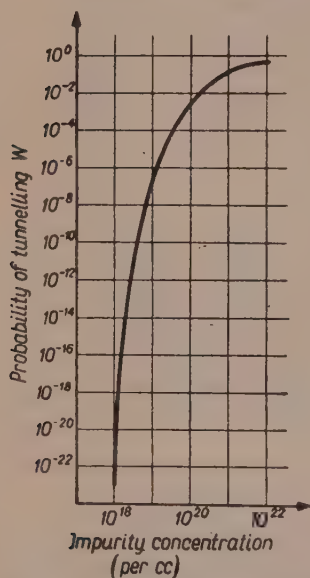


Fig. 5. Probability of tunneling by the Zener process, versus impurity concentration.

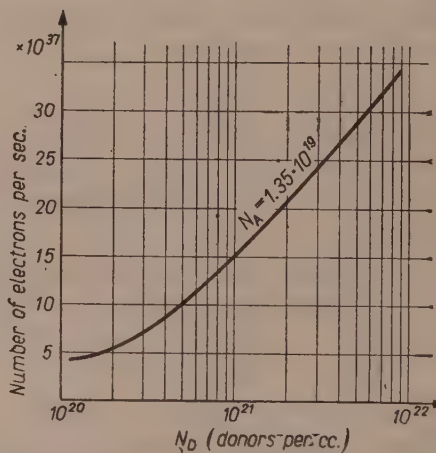


Fig. 6. Dependence of peak current versus impurity concentration, calculated from eqn. (3).

probability does not become appreciable until the impurity concentration is $\sim 10^{19}$ [cm⁻³]. It can be shown that this concentration would have been much higher, if the junction had not been a steep one, but this condition is not considered here.

In order to analyse the second condition, the value of the peak current I_p was calculated for different impurity concentrations, using formula (3). The results are shown in Fig. 6.

Conclusions concerning technology can now be drawn:

1. the impurity concentration on both sides of the junction should be as high as possible,
2. the profile of impurity concentration change at the junction should be very steep.

It has not been mentioned, but it is quite obvious, that the junction should be perfect i. e. linear current due to leakage across the junction should be negligible. If this condition is not satisfied, diodes will have small current ratio and consequently a small figure of merit (see sec. 2.3).

2.3. Criterion for the evaluation of diode properties

The structure of a tunnel diode, leads to an equivalent circuit shown in Fig. 7 [11]. In this circuit:

- C — is the space charge capacitance,
- R_n — is the incremental negative resistance,
- r_s — is the bulk series resistance,
- C_s — is the stray capacitance of the holder,
- L_s — is the lead series inductance.

All these parameters are believed to be frequency independent as they are due to phenomena associated with majority carriers. The carriers relaxation time might be considered as the possible source of the frequency limitation. However, its magnitude is a few orders smaller than the time corresponding to the highest expected frequency of operation of tunnel diodes, and can therefore be neglected.

To provide some means of evaluation of tunnel diode frequency properties a figure of merit may be introduced in the following form:

$$F = f_0 = \frac{\sqrt{\frac{R_n}{r_s} - 1}}{2\pi R_n C} \quad (9)$$

This value is equal to the maximum frequency of oscillation in an ideal tunnel diode oscillator and does not depend on the junction area. The value of the $R_n C$ product is of special interest as it contributes in a similar way to the simplified expression for the gain bandwidth product of a tunnel diode amplifier:

$$G_t^{1/2} \Delta f = \frac{1}{\pi R_n C} \quad (10)$$

From the above considerations the necessity of small value of the $R_n C$ product may be concluded. It will be seen later, that its components

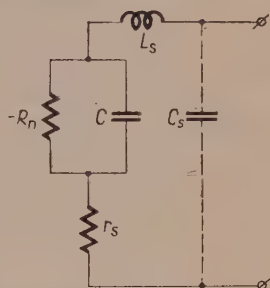


Fig. 7. Equivalent circuit for a tunnel diode.

are inter-dependent and vary in opposite directions when the construction of the diode is altered. Thus the value of the $R_n C$ product can be regarded as an index of diode performance. This was the starting point for this work and an attempt was made to improve the construction of the diode and its technology so that the minimum value of the $R_n C$ product was obtained.

3. TECHNOLOGY

Diodes were fabricated by an alloying method since it seemed the most suitable among all known methods.

3.1. Materials

P-type germanium doped with gallium and *n*-type germanium doped with phosphorus were used in this work. The impurity concentrations were $1.2 \cdot 10^{19}$ [cm⁻³] and $2.5 \cdot 10^{19}$ [— cm³], respectively.

The composition of the alloy material was determined by the requirements which the *p-n* junction has to fulfill (see sec. 2.2). To satisfy these requirements two- and three-component alloys had to be used in which the respective components were the doping agent, the carrier agent and the wetting agent. Arsenic for *p*-type Ge and gallium or aluminium for *n*-type Ge were employed as doping agents. This choice was determined by the high values of segregation coefficients of those materials at the melting point of germanium. Gold, antimony, tin and indium were selected as the most suitable carrier agents, and zinc, gold and lead as wetting agents.

3.2. Fabrication

The alloying technique employed in the course of this work followed the standard practice in diode technology.

Alloying was carried out immediately after wetting, and no special care was taken to control the rate of the temperature increase. The rate of recrystallization, however, was regarded as essential in this process since it determines the impurity distribution in the recrystallized region. Samples were cooled, therefore, immediately after alloying had been carried out (see Fig. 8).

The temperature of alloying was found to affect diode performance significantly. Fig. 9 shows the variation of the peak current density i_p , the $R_n C$ product, and the current ratio a , with the alloying temperature. The time of the alloying process was kept constant during these experiments. The graphs display the results obtained for two different alloys on *n*-type germanium of the same resistivity (0,00097 Ω cm). Similar results were found for *p*-type germanium. This was demonstrated by the

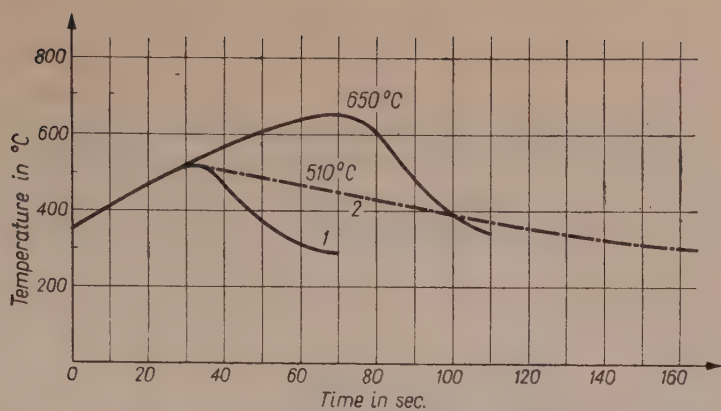


Fig. 8. Temperature of furnace during alloying process.

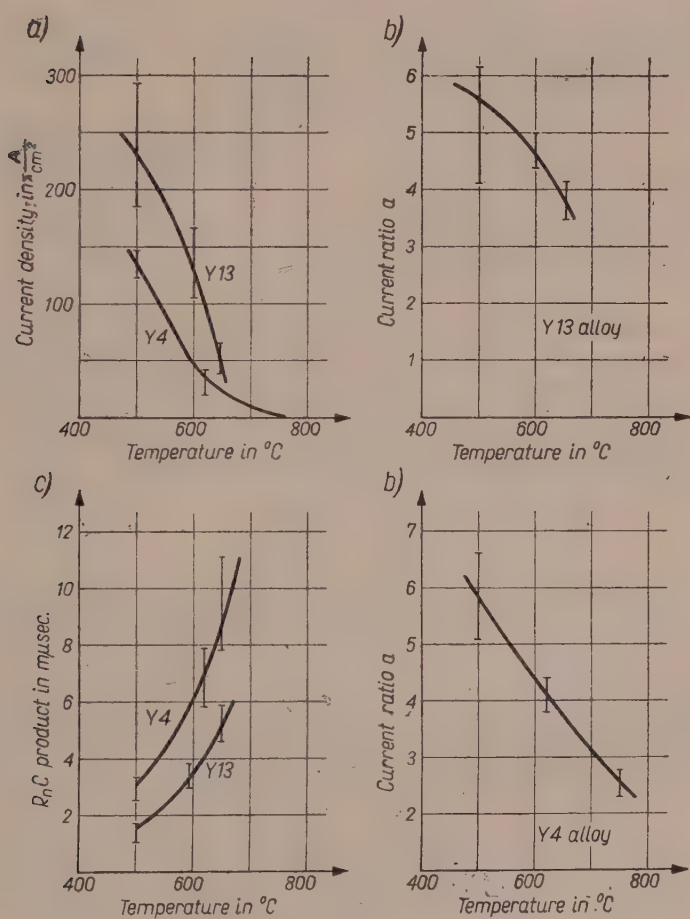


Fig. 9. Dependence of diode parameters on alloying temperature for Y13 and Y4 alloys. a. peak current density i_p , b. current ratio a , c. $R_n C$ product.

characteristic obtained for p -type diodes made at a temperature of 700°C (Fig. 10). It is not unlikely that the effect is due to diffusion of impurity atoms across the region where the p - n junction is being formed. This was considered for the junction produced by the alloying of indium-gallium into n -type germanium doped with phosphorus. It seemed reaso-

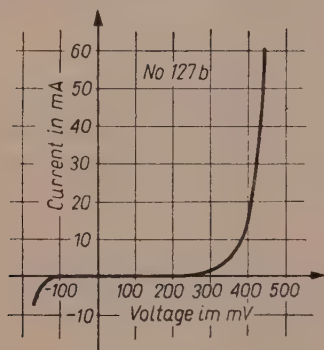


Fig. 10. Characteristic of n - p diode which does not exhibit negative resistance because of high temperature of alloying (700°C).

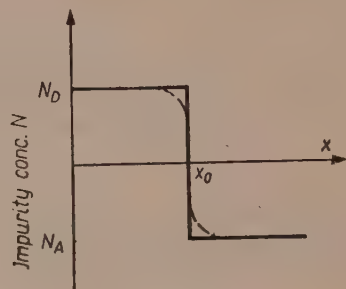


Fig. 11. Schematic diagram of an ideal n - p junction.
——— after pure recrystallisation,
- - - when diffusion took place.

nable to assume that after the recrystallization process without diffusion had taken place, the junction was ideally abrupt (Fig. 11), and when diffusion occurred, the shape of the junction was modified as shown by the dotted line. To find the theoretical expression describing this shape, solution of the diffusion equation in the form

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad (11)$$

should be found, in which D is no longer constant but is a function of time. The problem was simplified by the assumption that diffusion of acceptors is negligible and the maximum temperature of process was kept constant for the period of time in which diffusion length $L = \sqrt{Dt}$ was appreciable (see Fig. 8 and Fig. 12). With these assumptions, solution of (11) was represented in the following form:

$$\begin{aligned} n(x_0 - x) &= N_D - \frac{1}{2} N_D \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{x_0 - x}{2L} \right) \right] \quad \text{for } x < x_0 \\ n(x_0 + x) &= -N_A + \frac{1}{2} N_D \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{x - x_0}{2L} \right) \right] \quad \text{for } x > x_0 \end{aligned} \quad (12)$$

where $L = \sqrt{Dt}$.

The function

$$\begin{aligned} n(x_0 - x) &= N_D - \frac{1}{2} N_D \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{x_0 - x}{2L} \right) \right] \quad \text{for } x < x_0 \\ n(x_0 + x) &= \frac{1}{2} N_D \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{x - x_0}{2L} \right) \right] \quad \text{for } x > x_0 \end{aligned} \tag{13}$$

is plotted in Fig. 13 for time 10 sec. and temperature 510°C and 650°C

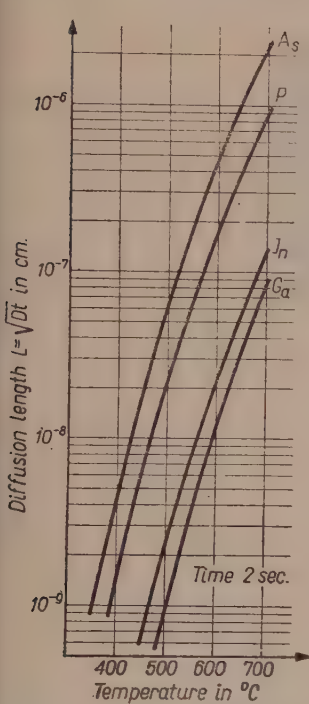


Fig. 12. Diffusion length L versus temperature for different impurities.

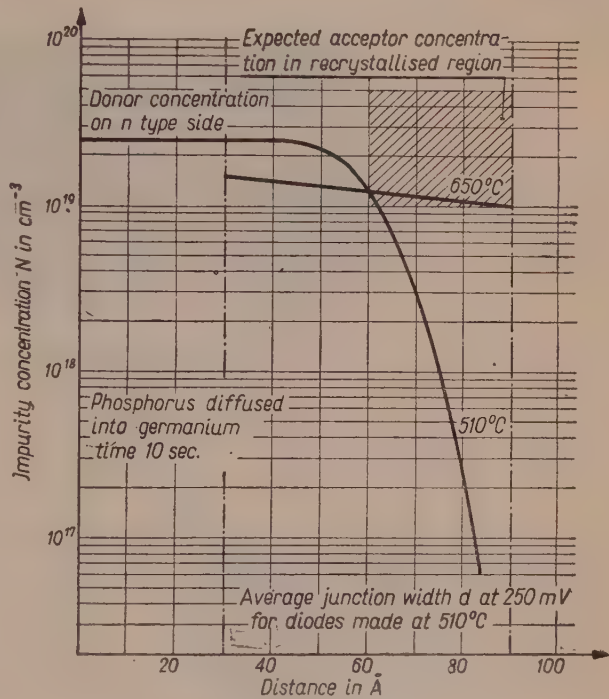


Fig. 13. Impurity distribution in a p-n junction due to diffusion.

respectively, although the approximation with respect to time is too optimistic in the case of 650°C. Thus the junction width increases with alloying temperature due to the diffusion, and results of Fig. 9 may be accounted for by this process.

3.3. Final etching and encapsulation

Final etching was carried out after the diode had been soldered to the base connection, the aim being to clean the surface around the junction and reduce the diameter of the junction to a desirable value. The latter is an important aspect of the work since serious practical

difficulties are encountered when pellets smaller than $100\ \mu$ are alloyed. There is also another advantage offered by this method. This becomes apparent from the cross-section shown in Fig. 14. As it can be seen, the pellet is almost unaffected by the etching and a „mushroom” construction with relatively large contact is obtained. This construction simplifies the problem of making connections to the junction. Etching was carried out in the way, commonly employed in semiconductor technology. The influence of successive etching on the DC diode characteristics is shown

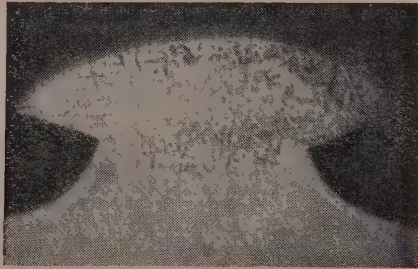


Fig. 14. Cross-section of a p - n tunnel diode.

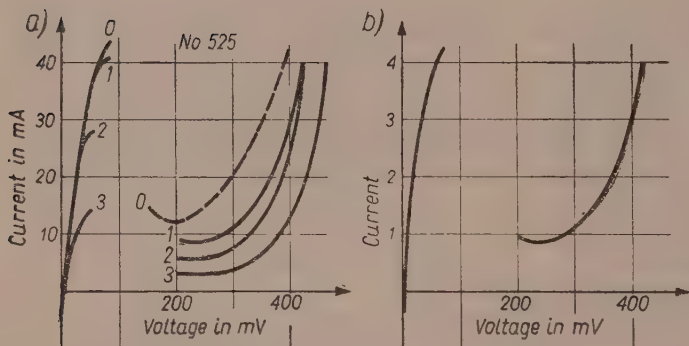


Fig. 15. Influence of successive etching on diode current-voltage characteristic.
a. absolute values of current before and after etching,
b. curve (3) normalised to curve (1) in (a).

in Fig. 15a. It is interesting to observe that the change of valley voltage V_v can be accepted as an indication of etching efficiency, and the process should be stopped, when V_v remains constant. In general, continuation of etching, after the surface had been cleaned, did not change the diode characteristics as shown in Fig. 15b. There were cases, however, when the current ratio a was slightly increased or decreased and this was accounted for by junction non-uniformity.

The total inductance of a diode can be found from the maximum frequency of oscillation as follows:

$$L_0 = r_s R_n C$$

We shall see in sec. 4.1. that the following figures may be assumed for a typical diode:

$$R_n C = 1,5 \cdot 10^{-9} [\text{sec}]$$

$$r_s = 0,1 \text{ ohm}$$

thus

$$L_0 = 0,15 \text{ m}\mu\text{H}$$

This means that, if the maximum frequency of oscillation is to be achieved, the value of the diode mounting inductance L_s (see Fig. 7) should be made smaller than 0,15 m μ H. To meet this requirement, diodes were encapsulated using a standard capsule which has been used for microwave silicon diodes. Individual parts of the diode are shown in Fig. 16.

3.5. The dependence of diode properties on the composition of alloying materials.

It was shown in section 2.2. that the properties of tunnel diode depend strongly on the impurity concentration on both sides of the junction. In consequence, the composition of the alloy would affect tunnel diode characteristic to a larger extent, than is observed for ordinary diodes. Therefore, an improvement in tunnel diode parameters can be obtained by the proper choice of composition of an alloying material. This was regarded as one of the main points in tunnel diode technology, and considerable attention was paid to this problem in the course of the work.

Both *p*- and *n*- type germanium diodes were investigated. As a result, a few alloys, which provided the best results, were selected. They are listed in table 1, and for illustration typical characteristics for every type of diode are shown in Fig. 17.

In addition to alloys containing gallium as the doping agent, a number of aluminium alloys were investigated. It was found, however, that aluminium made good wetting impossible. As a result, diodes with aluminium had current ratio a of the order of 1,5 to 2,5, and very bad reproducibility was observed.

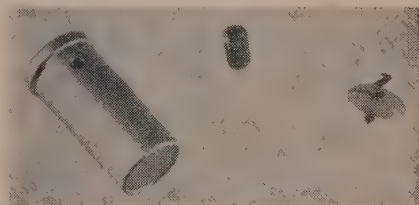


Fig. 16. Individual parts of a tunnel diode.

Table 1

Parameters of the experimental tunnel diodes made by alloying of different alloys

Symbol of the Alloy	Composition	Temp. of Alloying	α	i_p	$R_n C$	c
		°C	mA/mA	A/cm ²	mμ sec	μF/cm ²
X 2	Sn + As 50%	650	5,5-4	2,3-1,5	26	2
X 8	Sb + As 10%	550	5,7-3,5	8,7-6,5	25-30	1,8-1,9
X 9	Au + As 20%	550	5,5-3,5	70-25	8,3-10	1,5-2
Y 4	In + Ga + Zn 0,55% 2,2%	500	6,6-5	140-125	2,6-3	1,9-2,2
Y 13	In + Ga + Pb 0,5% 8,5%	500	6-4,5	270-160	1,4-2	2-2,35

It is noted that the presence of lead in the alloy can significantly improve the $R_n C$ product of the diode. The amount of lead in the alloy is, however, limited to the figure given in table 1. This limitation arises because of the poor mechanical properties of the junction when more lead is added to the alloy. In general, alloys based on gold as a carrier agent have great advantage over the indium alloys, because of mechanical properties. Thus, an attempt has been made to use gold as a carrier agent for p -type alloys. Yet so far it has still not been successful.

3.6. The influence of crystal orientation on the diode properties

The crystallographic orientation of the semiconductor crystal can affect tunnel diode properties for two reasons:

- 1) the wetting and alloying processes depend on the density of atoms of the plane into which alloying takes place [8],
- 2) it may be expected that differences in energy band structure of a semiconductor, due to crystallographic orientation [6], may affect the tunneling probability.

All diodes described in the previous paragraph were made on the [111] plane which is the most densely-packed plane in the germanium crystal. Thus, to find the effect of crystal orientation, plane [112] was chosen as one with the smallest density of atoms. For comparison, diodes on wafers cut on the [111] plane from the same crystal were made,

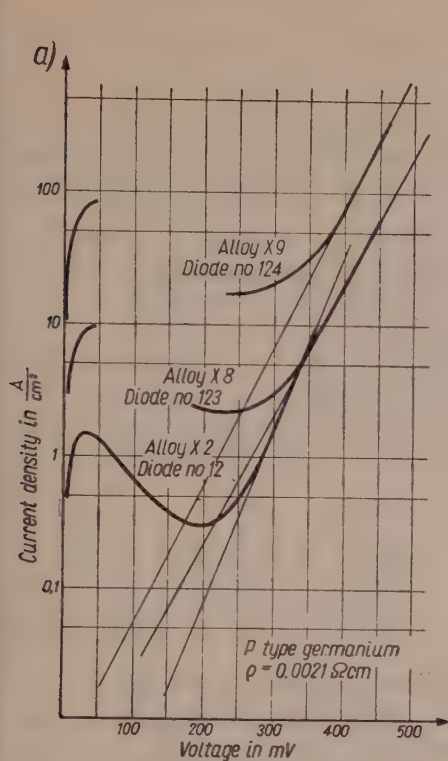


Fig. 17 (a). Current-voltage characteristic of diodes made with different alloys on *p*-type germanium.

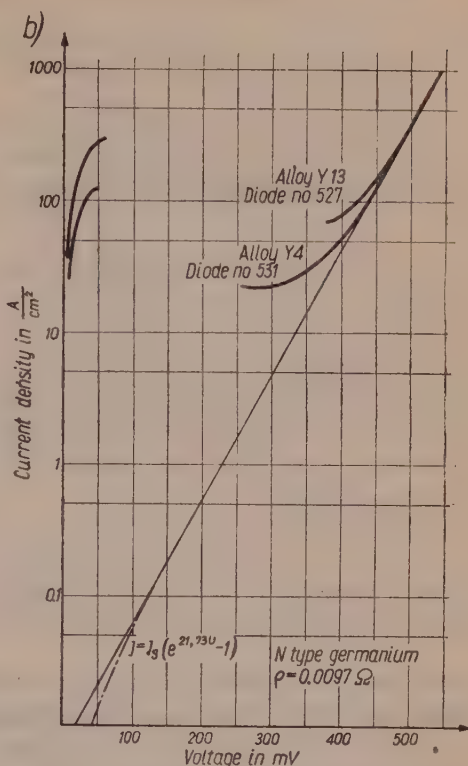


Fig. 17 (b). Current-voltage characteristic of diodes made with different alloys on *n*-type germanium.

Table 2

Average parameters of the diodes made on [112] and [111] planes

Germanium n type	I_p	I_v	V_p	V_v	a	i_p
$\rho = 0.00097$ [Ω cm]	mA	mA	mV	mV	mA/mA	$\frac{\text{A}}{\text{cm}^2}$
[112] plane	20–44	9–31	60–80	115–180	1.07–2.7	120–165
[111] plane	20–50	3.5–10	55–75	240–280	6–4.5	270–160

under the same technological conditions. The results are presented in table 2. The main difference between these two types of diodes is the much smaller current ratio a and valley voltage V_v of the [112] diodes. These parameters could be slightly improved after prolonged etching, and therefore, poor results could be partly accounted for by the nonuniformity of the junction.

4. SOME ELECTRICAL PROPERTIES OF THE DIODES

4.1. Typical parameters and the current-voltage characteristic

Both p - n and n - p germanium tunnel diodes were made in the course of this work. The average parameters of these diodes are given in tables 3a and 3b. Figures of table 3a present absolute values of the parameters

Table 3

Parameters of diodes made under the best technological conditions

Germanium	I_p	I_v	V_p	V_v	area	$c_{250 \text{ mV}}$	$-R_n$	r_s
	mA	mA	mV	mV	$\text{cm}^2 10^4$	pF	Ω	Ω
n -type	20—50	3,5—10	55—75	240—280	1,7—2,1	220—440	8—3,5	0,12—0,1
p -type	1,2—20	0,25—4	45—55	205—230	0,5—2,8	410—800	100—8,5	0,8—0,14

Germanium	a	i_p	$c_{250 \text{ mV}}$	$R_n C$	Fig. of merit
	mA/mA	A/cm ²	$\mu\text{F/cm}^2$	m μ sec	kMHz
n -type $\varphi 0,00097 [\Omega\text{cm}]$	6—4,5	270—160	2—2,35	1,4—2	0,8—0,5
p -type $\varphi 0,0021 [\Omega\text{cm}]$	5,5—3,5	70—25	1,5—2	8,3—10	0,23—0,19

and the spread was mainly due to variations in the junction areas. An exception to this is the valley voltage V_v which does not depend on the junction area, and the two figures show the scattering due to other causes. The double figures of table 3b have the same meaning. Fig. 18 shows the I - V characteristic of an n - p diode with a small peak current I_p . This characteristic was taken by the DC method discussed in App. II. In the range of large positive voltages, the characteristic follows the exponential law of the type $I = I_s (\exp^{A V} - 1)$. It was found, that the exponent A is different from $\frac{q}{kT}$. The average value of A for tunnel

diodes is fairly close to $\frac{1}{2} \frac{q}{kT}$ and varies slightly from unit to unit (see Fig. 17). It is supposed that this can be accounted for by the large density of the current flowing across the junction [12]. Using values of A and I_s found from an approximation of the characteristic of Fig. 18, the complete diffusion current characteristic was calculated and drawn in the same figure. Hence, the complete tunnel current characteristic was found by simple subtraction and is also shown in Fig. 18. The result shows that the valley current is due to other process rather than simple leakage across the junction, as has been suggested elsewhere [3]. This conclusion was also confirmed during etching experiments, when exact inverse proportionality between the negative resistance and the junction area

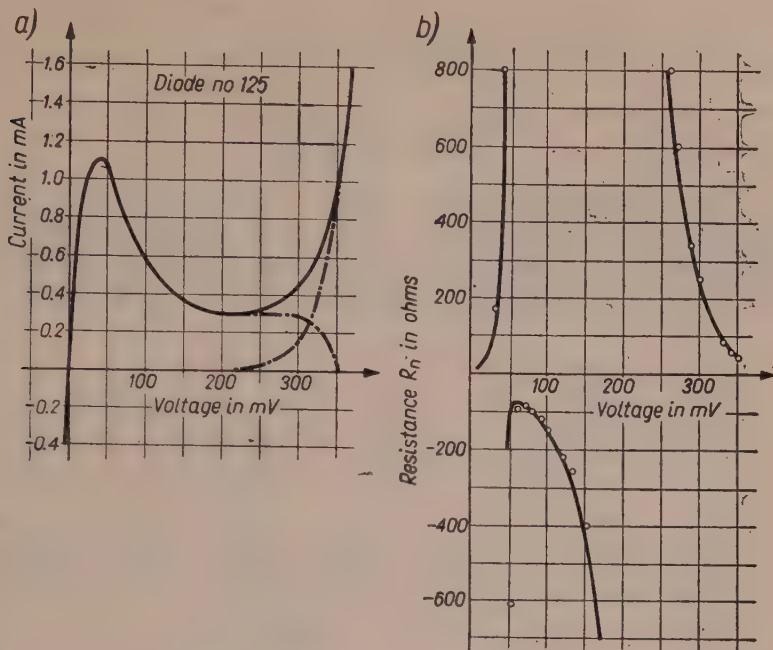


Fig. 18. a. Current-voltage characteristic of an n - p diode. Dotted lines show tunnel and diffusion components found from calculation. b. Resistance of diode versus bias voltage obtained by differentiation of current-voltage characteristic. Circles show values found by a bridge method.

was obtained (see Fig. 38). In Fig. 18 also the $R_n = f(V)$ characteristic, obtained from differentiation of the $I-V$ characteristic is plotted. These results were confirmed by a bridge method, the measured points are shown on the same graph.

Similar type of $I-V$ characteristic were found for the p - n diodes (see Fig. 1).

4.2. The $R_n C$ product and its relation to the peak current density

An interpretation of the $R_n C$ product was given in section 2.3. The aim of this section is to consider individual components of the $R_n C$ product and the relationships with the peak current density.

To obtain more general information, a number of diodes were made at different alloying temperatures and using different alloying materials. The value of the $R_n C$ product was found by separate measurements of R_n and C employing methods described in App. II. The results were then collected together and some universal curves for p - n and n - p type diodes were obtained.

In Fig. 19 values of R_n are plotted *versus* peak current. The curve can be approximated by the following function:

$$R_n = \frac{10^3}{5.68 I_p} \quad [\text{ohm}] \quad (14)$$

where I_p = peak current in [mA].

This expression should be regarded as a first approximation. In fact, the valley voltage as well as the valley current depend on the tunnel process and should contribute to this formula.

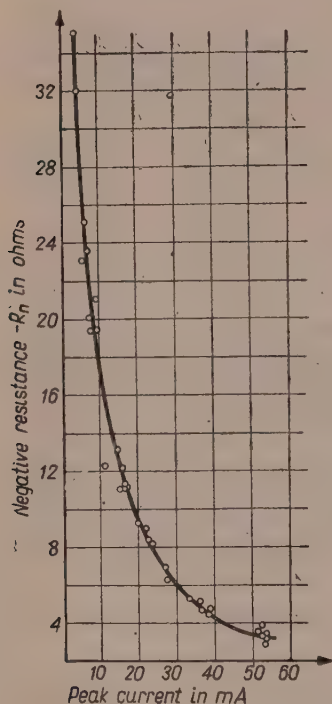


Fig. 19. Relationship between negative resistance R_n and peak current for p-n diodes made at various temperatures.

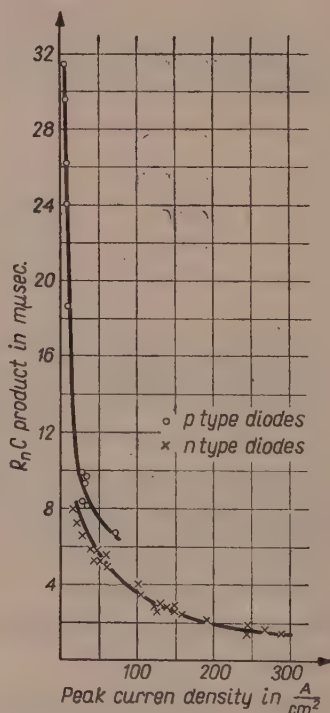


Fig. 20. $R_n C$ product versus peak current density for diodes made at various temperatures.

For each diode the capacitance was measured at a convenient bias voltage of about 250 mV. The resultant $R_n C$ product is independent of the junction area, and for that reason it was plotted against the peak current density (Fig. 20). It can be seen from the graph that the points lie on two curves for n-p and p-n diodes respectively. The approximate expressions describing these curves are:

$$R_n C = \frac{1}{(0,0257 i_p + 0,15) \cdot 10^8} \text{ [sec]} \quad \text{for } p\text{-}n \text{ type} \quad (15)$$

$$R_n C = \frac{1}{(0,0224 i_p + 0,6) \cdot 10^8} \text{ [sec]} \quad \text{for } n\text{-}p \text{ type} \quad (15a)$$

where i_p is the peak current density in $\left[\frac{A}{cm^2} \right]$.

Substituting (14) for R_n in (15) and (15a), the dependence of the capacitance on the peak current density was calculated in the form:

$$\frac{C}{A} = \frac{5,68 i_p}{2,57 i_p + 15} \left[\frac{\mu F}{cm^2} \right] \quad \text{for } p\text{-}n \text{ type} \quad (16)$$

$$\frac{C}{A} = \frac{5,68 i_p}{2,24 i_p + 60} \left[\frac{\mu F}{cm^2} \right] \quad \text{for } n\text{-}p \text{ type} \quad (16a)$$

where A is the area of the junction, and plotted for both types of diode in Fig. 21. The curves obtained by this method fit the measured points quite satisfactorily. The observed

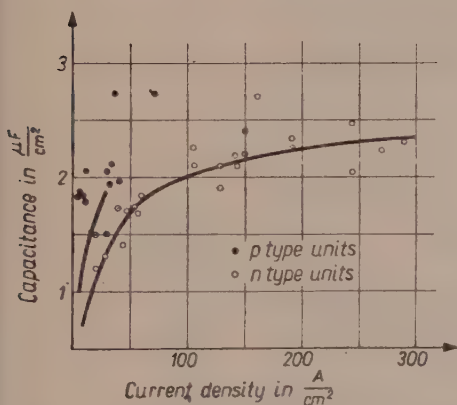


Fig. 21. Capacitance versus calculated peak current density for p and n type diodes made at various temperatures.

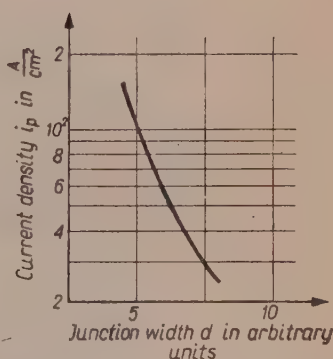


Fig. 22. Dependence of peak current density i_p on junction width d , obtained from graph in Fig. 21 for n type diodes made with Y 13 alloy.

scattering is mainly accounted for by inaccuracy in area measurements. They were carried out using a microscope, and, therefore, the error due to irregularity of the junction shape should be taken into account.

According to what was concluded in section 3.2, the width of the p - n junction depends significantly on the temperature of alloying. Thus curves of Fig. 21 should correspond to the function plotted in Fig. 3, providing that diodes made of the same materials are considered. This

was found to be the case by calculating i_p from Fig. 21 versus an arbitrary unit $d = K \frac{1}{C}$, where K is a constant. Fig. 22 shows results obtained for Y13 alloy.

It can be seen from Fig. 20 that high frequency tunnel diodes must have possibly large current density. However, the slope of the curve at high currents is too small to expect a significant improvement from further development of alloying technique and alloys, unless germanium with higher impurity concentration is used.

4.3. The dependence of diode capacitance on the applied voltage

As already discussed, the figure of merit of the tunnel diode is inversely proportional to the diode capacitance. It is therefore of interest to know the dependence of the capacitance on the voltage applied to the

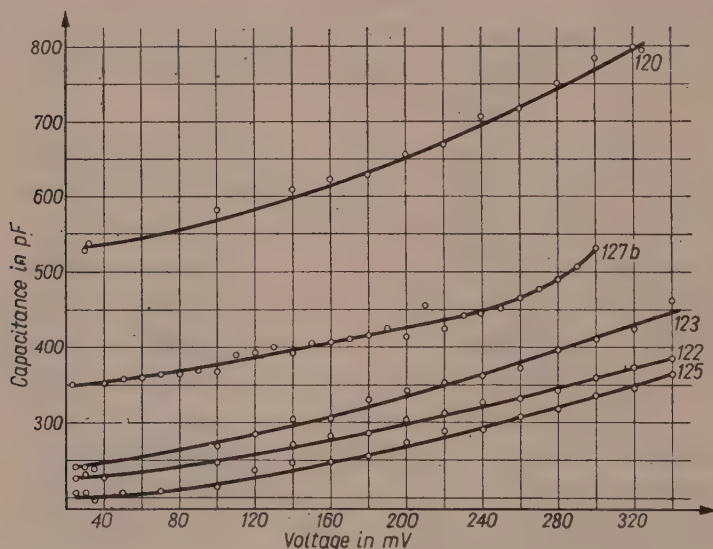


Fig. 23. Diode capacitance C versus bias voltage for n - p diodes. (No 127b is the diode with the I - V characteristic shown in Fig. 10).

diode. The measurements were performed employing the method described in App. II. The results are presented in Fig. 23. They show the voltage dependence of the capacitance for n - p units with peak currents of the order of a few milliamperes.

It was shown in section 4.1 that the diffusion current across the junction can be neglected in the range of voltages of interest by comparison with the tunnel current. Hence, the capacitance plotted in Fig. 23

can be assumed to be the pure transition capacitance. Theoretical voltage dependence of this capacitance for an abrupt diode was given by Shockley in the form [see 10]:

$$C = \frac{A}{\sqrt{V_D - V}} \quad (17)$$

where V_D is the built-in voltage

A is a constant.

This formula was derived for an ideal abrupt junction and it was expected to hold for a tunnel diode. It may be seen, however, by plotting $\frac{1}{C^2} = f(V)$ on the graph of Fig. 24, that expression (17) does not apply

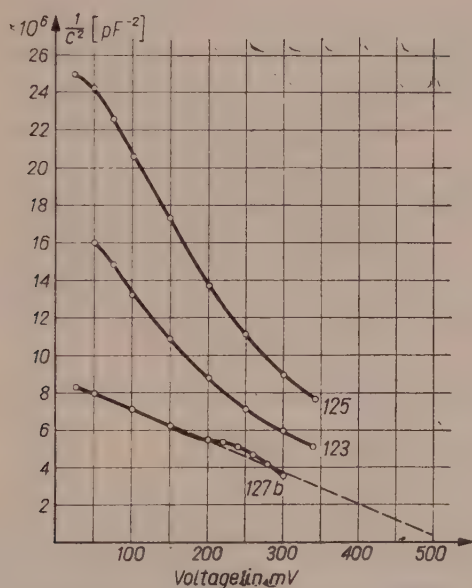


Fig. 24. Capacitance from graph in Fig. 16 presented as a function:

$$\frac{1}{C^2} = f(V).$$

for the case of the tunnel diodes, and the following formula was found empirically to satisfy the function of Fig. 23.

$$C = \frac{A}{(V_D - V)}. \quad (18)$$

Function $\frac{1}{C} = f(V)$ is plotted in Fig. 25. The possible explanation for this result is that, either the structure of the tunnel diode junction is more complicated than that assumed by Shockley for an ordinary diode,

or the contribution of the diffusion capacitance cannot be neglected. It is interesting to note, that the capacitance of the diode, which was made from the same materials, but which exhibited the I — V characteristic of an ordinary diode because of high temperature of alloying (see section 3.2), shows satisfactorily good agreement with the Shockley's formula (diode no 127b in the Fig. 24).

The built-in voltage V_B given by the graph of Fig. 25 is of the order of 0,7 to 0,75 v. These values agree fairly well with those expected from

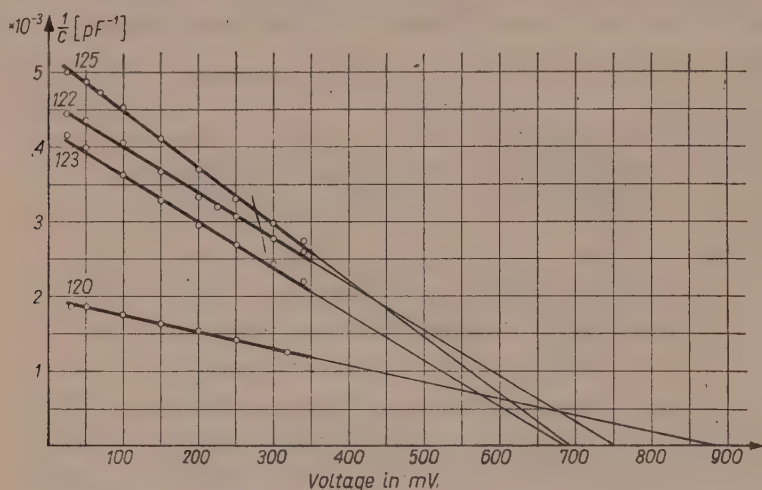


Fig. 25. Capacitance from graph (23) presented as a function

$$\frac{1}{C} = f(V).$$

the theory (section 2.1). However, there was a diode for which a value of 0,9 v was measured (no 120, Fig. 25). No reason could be found for this. The question therefore arises, whether the measured built-in voltage can be indentified with the barrier height.

4.4. Relationships between some other diode parameters

All the results presented in this section were obtained for the diodes made at different alloying temperatures and using Y 13 and Y 4 alloys respectively.

Fig. 26 shows relationship between the current ratio a and valley voltage V_v . It is to be noted that the valley voltage cannot be considered as constant for a given semiconductor. Its value depends on the technology and alloying materials. Similarly, the peak voltage V_p is not constant but changes with the value of the peak current I_p (see Fig. 27).

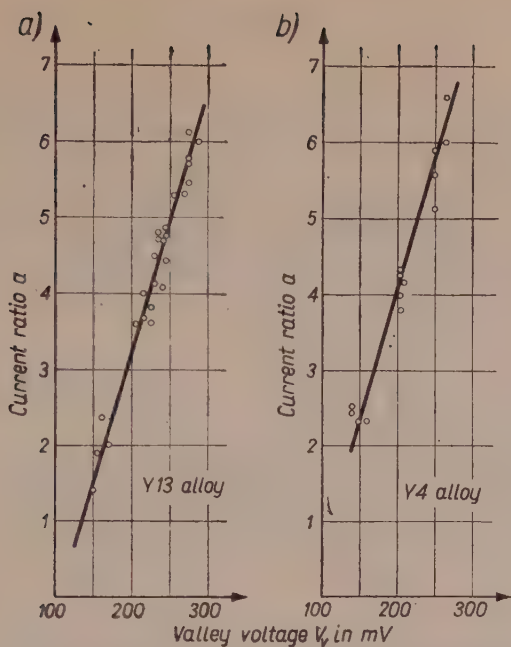


Fig. 26. Relationship between current ratio α and valley voltage V_v for p-n diodes made at various temperatures.
a. Y 13 alloy, b. Y 4 alloy.

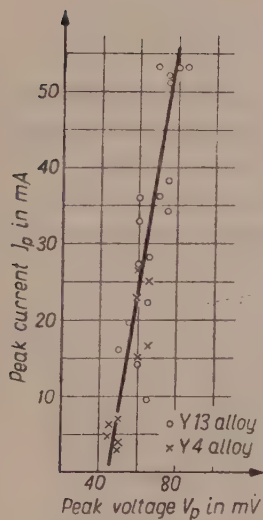


Fig. 27. Relationship between peak current and voltage at which it occurs, for the same diodes as in Fig. 29.

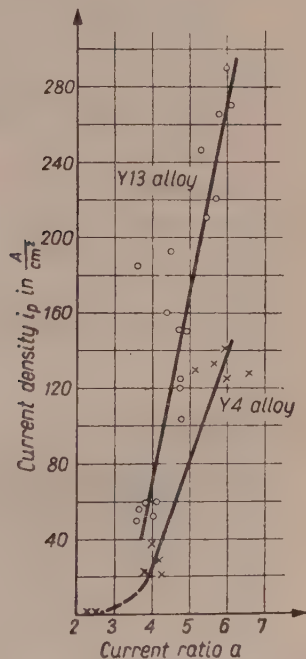


Fig. 28. Relationship between peak current density and current ratio α .

In this case, however, the change can be accounted for by the voltage drop across the diode. This explanation does not seem unreasonable, as the slope found from Fig. 27 is 0,58 ohm. For the same diodes the relationship between the current ratio and the peak current density was found as shown in Fig. 28. The graph 28 is of special interest. It shows that the current ratio a is almost proportional to the peak current density. This would suggest that the valley current does not depend on the same factors as the peak current.

4.5. Temperature dependence of the current-voltage characteristic

Both p - n and n - p diodes were measured at various temperatures, and all of them exhibited low sensitivity to the temperature changes. The obvious reason for this unique feature is the large impurity concen-

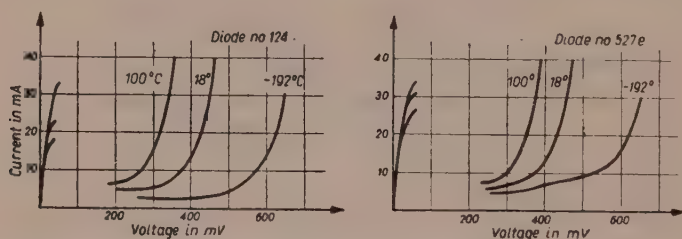


Fig. 29. Current-voltage characteristics of n - p and p - n type tunnel diodes at various temperatures.

tration on both sides of the p - n junction. Typical change of the I - V characteristic is shown in Fig. 29 and the variation of the peak current density with the temperature is presented in graph of Fig. 30. The slight difference observed between the characteristics for p - n and n - p diodes is accounted for by the difference in the resistivity of the germanium

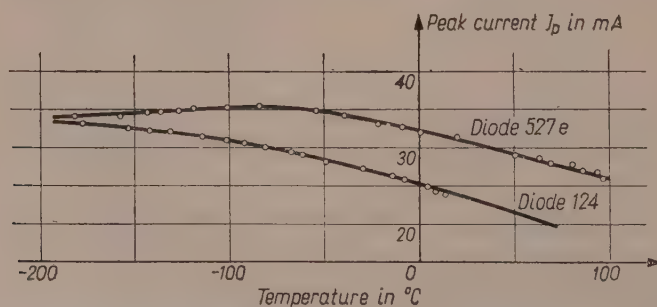


Fig. 30. Dependence of peak current on the ambient temperature for the diodes of Fig. 29.

from which the diodes were made. In general, the properties of the tunnel diode are improved when the temperature is lowered. In particular, the increase of the current ratio a and the valley voltage V_v should be noted. This results from the rearrangement of the electron energies in the semiconductor. A small hump seen in the p - n characteristic at low temperatures has already been observed by L. Esaki [2].

5. CONCLUSIONS

This work revealed some new and interesting relationships between various parameters of the tunnel diodes and gave information concerning the problems of design and fabrication. Some of the results throw light on the mechanism of the operation of the diodes, however, further investigations should be carried out to explain more thoroughly this mechanism and the I - V diode characteristic. The valley region of this characteristics is of special interest. According to the simple theory the valley current should be equal to zero. In practice this current has some finite value and is related to the other diode parameters. It is not unreasonable that the valley current may be accounted for by unknown impurity levels in the forbidden band. To examine this, further investigations of the relationship between parameters of the diodes and composition of alloys should be carried out. Also the distribution of impurity levels and their occupancy in the base semiconductor should be investigated. The dependence of the diode capacitance on bias voltage is also of special interest. The value of the built-in voltage and its relationship to other diode parameters may help to explain the structure of the junction. For the same reason the slope of the I - V characteristic deserves special attention.

Acknowledgments

The author wishes to thank Dr E. Heasell for his guidance throughout the work and helpful discussions. His thanks are also due to Dr J. Lamb for his encouragement.

The work was financed by the Admiralty and the Polish Academy of Science to whom the author is deeply indebted.

Germanium crystals used in this work were kindly supplied by Mr G. Ashton of British Thomson-Houston research laboratories and Dr F. Gibson of the Royal Radar Research Establishment.

REFERENCES

1. Esaki L.: *New phenomenon in narrow germanium junctions*. Phys. Rev. 109, p. 603, (1958).

2. Esaki L.: *Properties of heavily-doped germanium and narrow p-n junctions*. Solid State Phys. in Electronics and ..., vol. 1, Semiconductors part 1, pp. 514—523, Acad. Press London (1960).
3. Esaki L.: *The 116th meeting of the Electrochemical Society Columbus, Ohio, October, (1959).*
4. Hall R. N.: *Tunnel diodes*. IRE Transactions on Electron Devices, January, vol. ED-1, Nr 1, (1960).
5. Heines M. E.: *High frequency negative resistance circuit principles for Esaki diode applications*. The Bell System Technical Journal, May pp. 477—513, (1960).
6. Herman Fr.: *The electronic energy band structure of silicon and germanium*. PIRE December pp. 1703—1731 (1955).
7. Lesk J. A., Holonyak N. and Davidsohn U. S.: *The tunnel diode circuits and applications*. Electronics, November 27, vol. 32, pp. 60—64, (1959).
8. Mueller C. W., Ditrick N. H.: *Uniform planar junctions for germanium transistors*, RCA Review, December (1953).
9. Rutz R. F.: *A 3000-Mc lumped-parameter oscillator using an Esaki negative resistance diode*. JBM Journal, October, pp. 372—374, (1959).
10. Spenke E.: *Electronic semiconductors*, Mc. Graw-Hill Book Co, Inc., London 1958.
11. Sommers H. S.: *Tunnel diodes as high-frequency devices*. PIRE. July, pp. 1201—1206, (1959).
12. Sah C. T., Noyce R. N. and Shockley W.: *Carrier generation and recombination in p-n junctions and p-n junction characteristics*. PIRE September pp. 1228—1243 (1957).
13. Scarr R. W. A.: *The tunnel diode - a significant new semiconductor device*. British Communications and Electronics, April, p. 254 (1960).
14. Zener C.: *Theory of the electrical breakdown of solid dielectrics*. Proc. Royal Soc. vol. 145, pp. 523—529, (1934).

Appendix I

1. CALCULATION OF THE FERMI LEVEL POSITION IN A DEGENERATE SEMICONDUCTOR

The following equality satisfies the condition of charge neutrality in a heavily doped n -type semiconductor:

$$n_D^+ = n_n \quad (1)$$

where

n_D^+ is the number of ionised donors in the semiconductor

and $n_n = \int_{E_c}^{\infty} n(E) dE$ — the total number of electrons in the conduction band

$$\text{but} \quad n(E) dE = 4\pi \left(\frac{2m_n}{h^2} \right)^{3/2} (E - E_c)^{1/2} \frac{1}{1 + \exp \left(\frac{E - E_F}{kT} \right)} dE$$

$$\text{thus} \quad n_n = \int_{E_c}^{\infty} n(E) dE = 4\pi \left(\frac{2m_n}{h^2} \right)^{3/2} \int_{E_c}^{\infty} \frac{(E - E_c)^{1/2}}{1 + \exp \left(\frac{E - E_F}{kT} \right)} dE \quad (2)$$

putting $\eta = \frac{E}{kT}$; $\eta_F = \frac{E_F}{kT}$ and $E_c = 0$,

expression (2) takes the form:

$$n_n = 4\pi \left(\frac{2m_n}{h^2} kT \right)^{3/2} \int_0^{\infty} \frac{\eta^{1/2} d\eta}{1 + \exp(\eta - \eta_F)},$$

or

$$n_n = \frac{2}{\sqrt{\pi}} N_c \int_0^{\infty} \frac{\eta^{1/2} d\eta}{1 + \exp(\eta - \eta_F)}, \quad (3)$$

where

$N_c = 2 \left(\frac{2\pi m_n kT}{h^2} \right)^{3/2}$ is the effective density of states in the conduction band.

Assuming now, that the probability of the donor level being occupied by electrons is

$$f(E_D) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \exp\left(\frac{E_D - E_F}{kT}\right)} \quad (4)$$

the number of ionised donors n_D^+ can be found to be equal to the following:

$$n_D^+ = \frac{n_D}{1 + 2 \exp\left(\frac{E_F - E_D}{kT}\right)} = \frac{n_D}{1 + 2 \exp(\eta_F - \eta_D)} \quad (5)$$

where n_D is the concentration of donors in the semiconductor. Substituting from (3) and (5) for n_D^+ and n_n equation (1) becomes:

$$\frac{n_D}{1 + 2 \exp(\eta_F - \eta_D)} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} N_c \int_0^{\infty} \frac{\eta^{1/2} d\eta}{1 + \exp(\eta - \eta_F)} \quad (6)$$

$$\text{or} \quad n_D^+(\eta_F) = n_n(\eta_F). \quad (6a)$$

Equation (6) is satisfied by only one value of n_F which determines the actual position of the Fermi level at the donors concentration n_D . Employing the same method the position of the Fermi level in *p*-type semiconductor can be found as the solution of the following equation:

$$\frac{n_A}{1 + 2 \exp(\eta_A - \eta_F)} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} N_v \int_{E_v}^{-\infty} \frac{(\eta_v - \eta)^{1/2} d\eta}{1 + \exp(\eta_F - \eta)} \quad (7)$$

where

$$N_v = 2 \left(\frac{2\pi m_p kT}{h^2} \right)^{3/2}.$$

Again putting $\eta_v=0$ and changing the sign of the coordinates, equation (7) takes a form identical to (6), i.e.:

$$\frac{n_A}{1+2 \exp(\eta_F - \eta_A)} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} N_v \int_0^{\infty} \frac{\eta^{1/2} d\eta}{1 + \exp(\eta - \eta_F)} \quad (7a)$$

To solve (6) and (7a) two sets of curves have been plotted and the points of intersections have been accepted as the solutions for different donor and acceptor con-

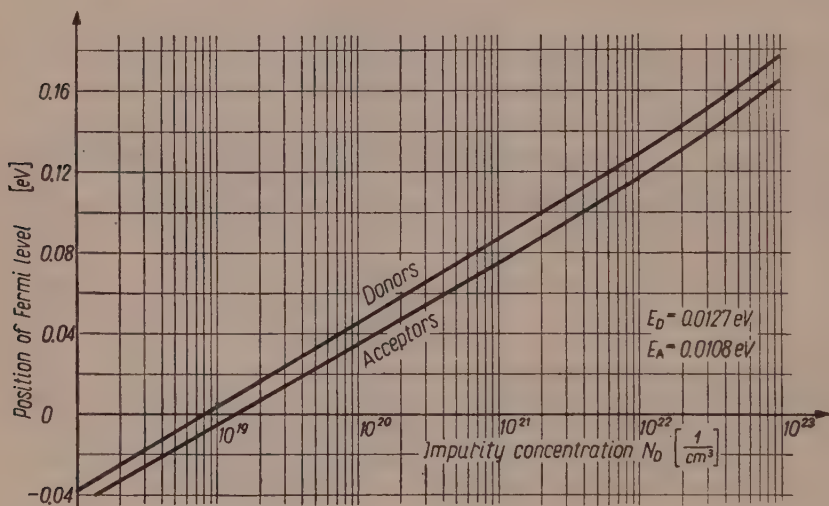


Fig. 31. Position of Fermi level versus impurity concentration for n and p type germanium.

centrations. Results are shown in Fig. 31. The following constants were used in the numerical calculations:

the ionisation energy of arsenic in germanium	$E_D = 0.0127$ eV
the ionisation energy of gallium in germanium	$E_A = 0.0108$ eV
"density of states" effective mass of electrons in conduction band	$m_n = 0.22$ m
"density of states" effective mass of holes in valence band	$m_p = 0.32$ m

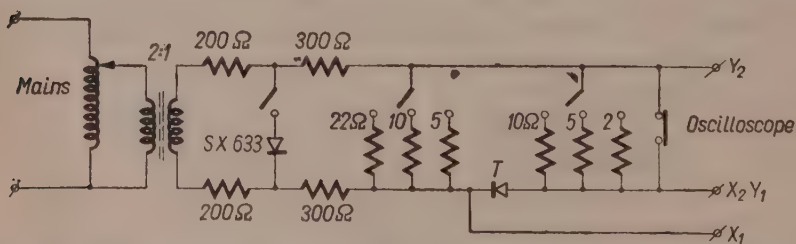


Fig. 32. Circuit used for the display of current-voltage characteristics.

1. ELECTRICAL MEASUREMENTS

1.1. I—V Characteristic

An oscilloscope tracer presented in Fig. 32 was used to observe the current-voltage characteristics of the diodes. Two of these characteristics, for diodes with

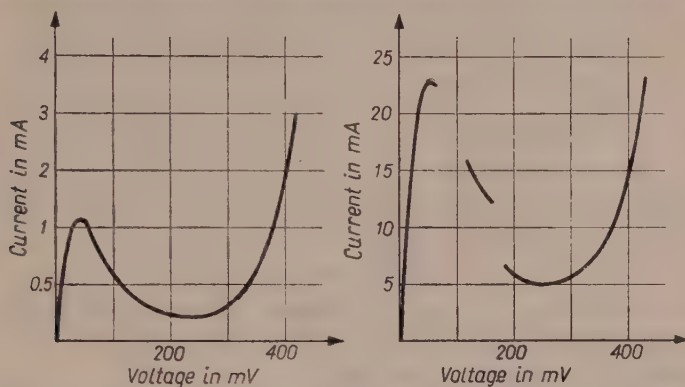


Fig. 33. Typical current-voltage characteristics observed on the tracer.

small and large peak currents respectively, are shown in Fig. 33. Employing a simple D.C. circuit represented in Fig. 34, more accurate measurements of I—V

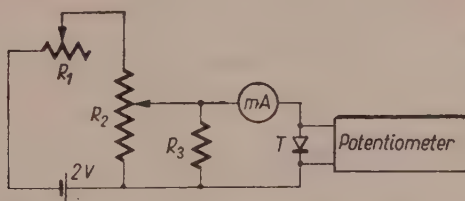


Fig. 34. Circuit used for measurement of D.C. characteristic.

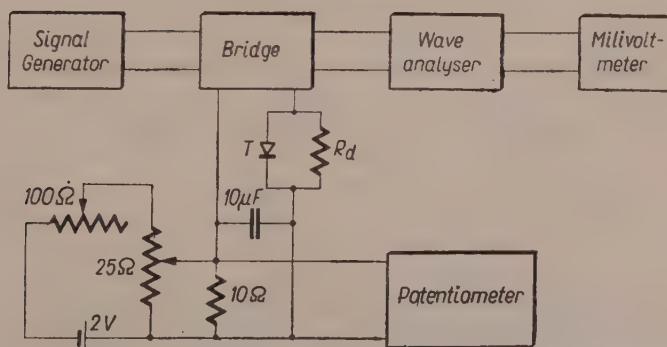


Fig. 35. Circuit used for measurement of diode capacitance.

characteristics could be taken. This circuit, however, was unstable when diodes with small negative resistance R_n were measured.

1.2. Diode Capacitance

Capacitance measurements present a major problem, because of the low impedance and negative resistance of the diodes. A low impedance bridge using the circuit shown in Fig. 35 was employed. The method gave satisfactory results in

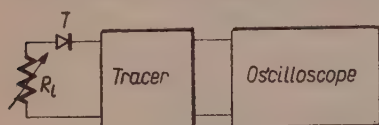


Fig. 36. Arrangement used for measurement of R_n employing the tracer.

the range of applied voltage within which the diode resistance $-R_n$ was higher than 35 ohms. This limitation was associated with the bridge itself. To ensure stability of the circuit the diode was shunted with a resistance of the order of 80–47 ohms. A bridge signal of 4 mv peak to peak at 200 kHz was applied across the diode.

Although some difficulties were experienced in the region of negative resistance, the total reproducibility of measurements was better than 10%.

1.3. Measurement of the negative resistance

The negative resistance of the diode R_n was measured using the circuit of Fig. 36. This method consisted in compensation of the negative resistance with some positive resistance connected in series with the diode. When full compensation was achieved i.e.

$$|-R_n| = R_t + r_s \quad (3)$$

the total resistance "seen" by the tracer was equal to zero. This corresponded to the shape of I–V characteristic shown in Fig. 37. In general, the series resistance

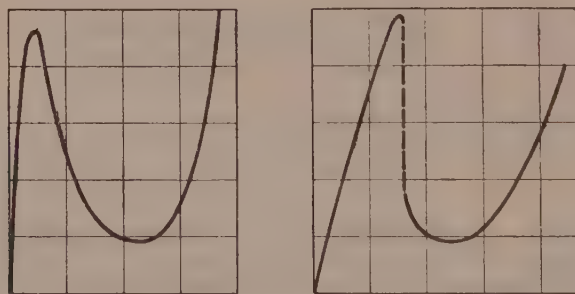


Fig. 37. Characteristics observed on tracer when resistance R_n was in series with diode.

of the diode r_s can be neglected by comparison with the value of R_n , thus (3) comes to: $|-R_n| = R_t$.

The measured value of R_n is some mean value of the negative resistance (larger than the minimum negative resistance $R_{n\min}$, see Fig. 1). It was found that this value represents quite satisfactorily the diode properties and accuracy of the measurement does not depend on the junction area. To show this a special diode with large area was made and etched successively, and the dependence of R_n on the junction area was found. Results are shown in Fig. 38 where R_n versus

I_p has been plotted. I_p is chosen because this current could be measured more accurately than the area of the junction, which is masked by the "mushroom" (see Fig. 14).

The method described above, gives us only one mean value of the negative resistance and when dependence of the negative resistance on voltage applied to the diode is demanded, another method has to be employed. This was achieved using the circuit employed for capacitance measurements (Fig. 35). In this circuit

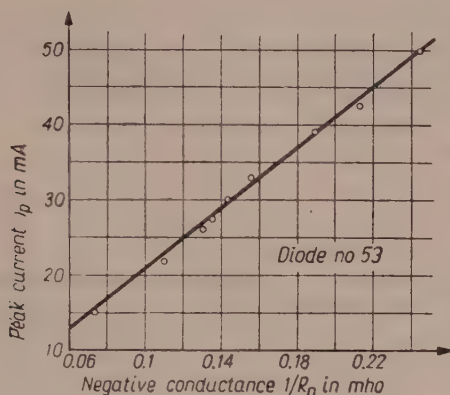


Fig. 38. Relationship between $\frac{1}{R_n}$ and peak current for diode after successive etching.

the diode was shunted with an appropriately chosen resistor and resultant impedance was measured. Assuming that r_s is negligible, R_n can be found from:

$$R_n = \frac{R_m R_d}{R_d - R_m} \quad (9)$$

where

R_m = the measured resultant resistance,

R_d = the shunt resistance.

Results obtained by this method are represented by dots in Fig. 18b and fit satisfactorily to the solid curve found from differentiation of the DC characteristic.

A serious drawback of this method is that it cannot be applied to diodes with $|-R_n| < 70$ ohm. This limitation arises from the instability of the measurement system.

TECHNOLOGIA I NIEKTÓRE WŁAŚCIWOŚCI GERMANOWYCH DIOD TUNELOWYCH

Podano krótką interpretację fizyczną charakterystyki diody tunelowej oraz omówiono warunki konieczne do jej otrzymania. Za podstawę do oceny właściwości diody przyjęto współczynnik dobroci. Zagadnienie uzyskania maksymalnie dużej wartości tego parametru było jednym z zasadniczych punktów niniejszej pracy.

Jako materiał wyjściowy użyto german typu p oraz typu n o koncentracji domieszek odpowiednio $1,2 \cdot 10^{19}$ [cm $^{-3}$] i $2,5 \cdot 10^{19}$ [cm $^{-3}$]. Diody były wykonywane metodą stopową. Zbadano wpływ temperatury wtapiania na parametry diody oraz ich zależność od składu użytego stopu.

Pomiary elektryczne wykonanych diod pozwoliły na uzyskanie interesujących zależności pomiędzy różnymi parametrami. Niektóre z tych parametrów zbadano dokładniej, w szczególności zmierzono pojemność diody w funkcji przyłożonego na diodę napięcia. Wyniki są różne od tych, które otrzymuje się dla zwykłych diod. Zmierzone również statyczne charakterystyki prądowo-napięciowe diod przy dużych prądach i obliczono, że nachylenie tej części charakterystyki rzędu $1/2 \frac{q}{kT}$. Zbadano wpływ temperatury złącza na charakterystykę prądowo-napięciową, wyniki zgadzają się z rezultatami publikowanymi przez innych autorów — [4,2].

W dodatkach podano obliczenie poziomu Fermiego oraz niektóre szczegóły dotyczące pomiarów.

ТЕХНОЛОГИЯ И НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ГЕРМАНИЕВЫХ ТУНЕЛЬНЫХ ДИОДОВ

Приведена краткая физическая интерпретация характеристики тунельного диода и обсуждены условия необходимые для их получения. Основой для оценки свойств диода положен коэффициент добротности. Получение максимально большого значения этого параметра является одной из основных проблем настоящего труда.

В качестве исходного материала применен германий p -типа и n -типа с концентрацией примесей соответственно $1,2 \cdot 10^{19}$ [см $^{-3}$] и $2,5 \cdot 10^{19}$ [см $^{-3}$]. Дiodы исполнялись путем сплавления. Проанализировано влияние температуры сплавления на параметры диода и их зависимость от состава примененного сплава.

Электрические измерения исполненных диодов привели к установлению интересных зависимостей между различными параметрами. Некоторые из этих параметров исследованы более подробно, в частности измерена емкость диода в зависимости от приложенного к диоду напряжения. Результаты отличаются от получаемых для обычных диодов. Измерены также статические вольтамперные характеристики диодов при больших значениях тока и вычислено, что наклон класса жесткости этой части характеристики содержится в диапазоне $1/2 \frac{q}{kT}$. Исследовано влияние температуры перехода на вольтамперную характеристику, полученные результаты сходны с опубликованными другими авторами [4], [2].

В приложении приведено вычисление уровня Ферми и некоторые подробности касающиеся измерений.

SZ. FIRKOWICZ

Rekopis dostarczono 3. 5. 1960.

niem tym interesowali się również pracownicy Massachusetts Institute of Technology, głównie E. A. Coomes [5] oraz L. S. Nergaard [6], [7]. Na zjeździe poświęconym 50-leciu katody tlenkowej (Paryż — 1955 r.) zagadnienie to poruszali w swych referatach: A. Dubois [8], H. Penotet [9], M. Berthaud [10] oraz H. Huber i D. Charles [11], [12].

W literaturze rozróżnia się dwie zasadnicze przyczyny iskrzenia katody tlenkowej:

- a) działanie prądu płynącego przez warstwę emisyjną — przy dużym obciążeniu katody,
- b) działanie natężenia pola elektrycznego przy katodzie — przy wysokich napięciach międzyelektrodowych i silnie rozwiniętej powierzchni katody.

Ponadto iskrzenie katody może być efektem wtórnym iskrzenia innych elementów lampy, np. anody.

Niniejsza praca dotyczy zagadnienia iskrzenia katody tlenkowej, wynikającego z przepływu prądu przez warstwę emisyjną.

Wieloletnie badania prowadzone w różnych ośrodkach zgromadziły szereg obserwacji, a mianowicie:

1. Iskrzeniu katody tlenkowej towarzyszy lokalny wzrost jej temperatury.
2. Iskrzenie katody powoduje lokalne uszkodzenia warstwy emisyjnej (zostawia ślady w postaci kraterów).
3. Katody lamp prostowniczych wykazują szczególną podatność na iskrzenie przy włączeniu zasilania. Podatność tych katod na iskrzenie jest tym większa, im większa jest pojemność wejściowa filtru i im mniejsza jest oporność transformatora zasilającego obwód anodowy.
4. Podatność katody na iskrzenie zależy od warunków jej pracy i rośnie:
 - a) ze wzrostem jej obciążenia,
 - b) ze wzrostem czasu trwania impulsu i częstotliwości repetycji,
 - c) przy obniżeniu temperatury katody.
5. Podatność katody na iskrzenie zależy od jej technologii:
 - a) maleje przy wzroście aktywności katody,
 - b) maleje przy zastosowaniu metalizacji warstwy emisyjnej przez dodanie do pasty domieszki drobnoziarnistego proszku niklu,
 - c) maleje przy spieczeniu na rdzeniu proszku niklu przed natryskaniem pasty emisyjnej,
 - d) rośnie wskutek narastania warstwy pośredniej Ba_2SiO_4 ; dobre rezultaty dają rdzenie prasowane z proszku czystego niklu, zalecane są również rdzenie z niklu biernego,
 - e) rośnie przy wzroście porowatości pokrycia
6. Iskrzenie katody występuje na ogół dopiero po pewnym czasie pracy lampy.

7. W pobliżu miejsca iskrzenia katody często obserwowane jest odstawanie warstwy emisyjnej od rdzenia.

Niniejsza praca ma na celu wyjaśnienie powyższych obserwacji i pewne ich uzupełnienie. W pracy przeprowadzono rozważania matematyczne niezbędne dla analizy jakościowej wpływu różnych czynników na podatność katody tlenkowej na iskrzenie, uznając że szczegółowa analiza ilościowa nie jest konieczna dla ich zrozumienia. Omówiono również wykonane prace doświadczalne, będące sprawdzianem wniosków wynikających z przeprowadzonych rozważań teoretycznych.

2. TEZA PRACY

Ograniczając się do iskrzenia katody wynikającego z przepływu prądu przez warstwę emisyjną, przyjęto tezę, że o podatności katody na iskrzenie decydują: niejednorodność jej temperatury oraz spoistość warstwy emisyjnej i przyczepność jej do rdzenia.

Przy tych założeniach mechanizm iskrzenia katody tlenkowej można wyjaśnić następująco:

Przyjmijmy układ współrzędnych ortogonalnych x, y, z , przy czym kierunek osi x niech będzie normalny do powierzchni rdzenia. Zakładając jednorodność właściwości warstwy emisyjnej Rohde [3] wykazał, że przy przepływie prądu przez warstwę emisyjną rozkład temperatury wzdłuż osi x nie jest jednorodny (posiada pochodne $\partial^n T / \partial x^n \neq 0$ — przynajmniej dla $n \leq 2$). Wykazał on również, że rezultatem tej niejednorodności rozkładu temperatury w warstwie emisyjnej będą siły mechaniczne (\mathcal{F}_T) dążące do oderwania cząstki warstwy emisyjnej od podłoża. Uwzględniając niejednorodność rozkładu temperatury w płaszczyźnie yz można powiedzieć, że siły \mathcal{F}_T wzrosną, gdyż

$$\vec{\mathcal{F}}_T(x, y, z) = \vec{\mathcal{F}}_T(x) + \vec{\mathcal{F}}_T(y, z),$$

wzrośnie zatem prawdopodobieństwo oderwania cząstki warstwy emisyjnej od podłoża. Przeciwdziałać temu będą spoistość warstwy emisyjnej i przyczepność jej do podłoża, które można przedstawić w postaci siły \mathcal{F}_P . Oderwanie cząstki warstwy emisyjnej (przynajmniej lokalnie) nastąpi, gdy będzie

$$\mathcal{F}_T > \mathcal{F}_P.$$

Odprowadzenie wydzielonego w danej cząstce ciepła Joule'a do podłoża będzie wówczas utrudnione, co prowadzić będzie do szybkiego jej przegrzania i wyparowania. Nastąpi lokalny wzrost ciśnienia w lampie, jonizacja i wyładowanie elektryczne zwane iskrzeniem. Wyładowanie to będzie podtrzymane przez towarzyszący mu lokalny silny wzrost gęstości

prądu katody. Rezultatem tego będzie lokalne uszkodzenie warstwy emisyjnej. Iskrzenie pozostawi po sobie ślad w postaci krateru.

Prawdopodobieństwo iskrzenia katody będzie:

$$P(z) = P(\mathcal{F}_T > \mathcal{F}_P) \quad (1)$$

gdzie: $P(z)$ — prawdopodobieństwo iskrzenia katody

$P(\mathcal{F}_T > \mathcal{F}_P)$ — prawdopodobieństwo zaistnienia $\mathcal{F}_T > \mathcal{F}_P$.

Wynika z tego, że dla uniknięcia iskrzenia katody należy:

1. zwiększyć siły \mathcal{F}_P — przez zwiększenie spoistości warstwy emisyjnej i przyczepności jej do rdzenia,
2. zmniejszyć siły \mathcal{F}_T — przez zwiększenie jednorodności rozkładu temperatury w warstwie emisyjnej.

W następnych rozdziałach niniejszej pracy szczegółowo rozpatrzono czynniki wpływające na jednorodność rozkładu temperatury w warstwie emisyjnej oraz na spoistość warstwy emisyjnej i przyczepność jej do rdzenia.

3. ANALIZA DLA PRZYPADKU JEDNORODNEJ WARSTWY EMISYJNEJ

Równanie różniczkowe przewodnictwa cieplnego w warstwie emisyjnej ma postać

$$\frac{\lambda}{cg} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{i^2 \rho}{cg} = \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (2)$$

gdzie:

- T — temperatura warstwy emisyjnej [$^{\circ}\text{C}$],
- t — czas [sek],
- c — ciepło właściwe warstwy [$\text{Ws/g}^{\circ}\text{C}$],
- λ — przewodność cieplna warstwy [$\text{W/cm}^{\circ}\text{C}$],
- g — gęstość warstwy emisyjnej [g/cm^3],
- ρ — oporność właściwa warstwy [Ωcm],
- i — gęstość prądu w impulsie [A/cm^2].

Przyjmując, że ciepło jest przenoszone tylko wzdłuż normalnej do powierzchni rdzenia, równanie (2) uprości się do postaci

$$\frac{\lambda}{cg} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{i^2 \rho}{cg} = \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (3)$$

Równanie (3) rozwiązane zostało przez Rohdego [3] przy następujących założeniach:

1. przewodność cieplna (λ) rdzenia jest duża, temperatura jego (T_r) jest więc stała czyli $T_r = T(x=0) = \text{const}$;
2. częstotliwość repetycji impulsu (f) jest dostatecznie mała, co zapewnia odprowadzenie podczas przerwy ciepła wydzielonego w czasie impulsu

- prądu; na początku każdego impulsu będzie więc $T(x,i)=T(x)_{i=0}$ dla wszystkich $0 \leq x \leq b$, gdzie b jest grubością pokrycia katody;
3. zmiany mocy odpromieniowanej przez katodę (P_r) są do pominięcia;
4. powierzchnia katody jest chłodzona wskutek strat na promieniowanie elektronów, tzn. $\lambda \left. \frac{\partial T(x,i)}{\partial x} \right|_{x=b} = -i\varphi$, gdzie φ jest potencjałem wyjścia elektronów z katody;
5. warstwa emisyjna jest jednorodna i jej właściwości ($c, g, \lambda, \varrho, \varphi$) nie zmieniają się w rozpatrywanym zakresie obciążenia i zmian temperatury.

Przyjmując za poziom odniesienia temperaturę rdzenia, Rohde [3] otrzymał:

$$\Delta T(x,i) = T(x,i) - T_r = \Delta T_1(x,i) - \Delta T_2(x,i), \tag{4}$$

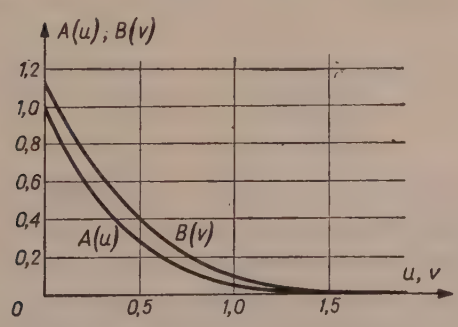
gdzie $T(x,i)$ oznacza temperaturę warstwy emisyjnej w odległości x od rdzenia przy przepływie prądu

$$\Delta T_1(x,i) = \frac{i^2 \varrho}{cg} \tau [1 - A(u)] \tag{4a}$$

$$\Delta T_2(x,i) = \frac{i\varphi}{\sqrt{cg\lambda}} \sqrt{\tau} \cdot B(v), \tag{4b}$$

gdzie τ oznacza czas trwania impulsu [sek]

$$u = \sqrt{\frac{cg}{\lambda\tau}} \frac{x}{2}; \quad v = \sqrt{\frac{cg}{\lambda\tau}} \cdot \frac{b-x}{2};$$



Rys. 1. Zależność $A(u)$ oraz $B(v)$ — wg [3].

Zależności $A(u)$ oraz $B(v)$ podano w postaci graficznej na rys. 1. Na rysunku 2 podano otrzymane przez Rohdego [3] rozkłady $T(x,i)$ dla różnych wartości τ dla przeciętnej katody tlenkowej przy $i=5 \text{ A/cm}^2$.

Uwzględniając spadek temperatury wskutek promieniowania cieplnego katody, równanie (4) przyjmie postać

$$T(x, i) - T_r = \Delta T(x, i) - \Delta T(x)_{i=0} = \Delta T_1(x, i) - \Delta T_2(x, i) - \Delta T_3(x, i), \quad (5)$$

gdzie $\Delta T_1(x, i)$ oraz $\Delta T_2(x, i)$ określone są równaniami (4a) i (4b)

$$\Delta T_3(x, i) = \frac{p_r}{\lambda} x = \sigma \frac{\varepsilon}{\lambda} (T_k^4 - T_0^4) x \approx \sigma \frac{\varepsilon}{\lambda} T_k^4 x, \quad (5a)$$

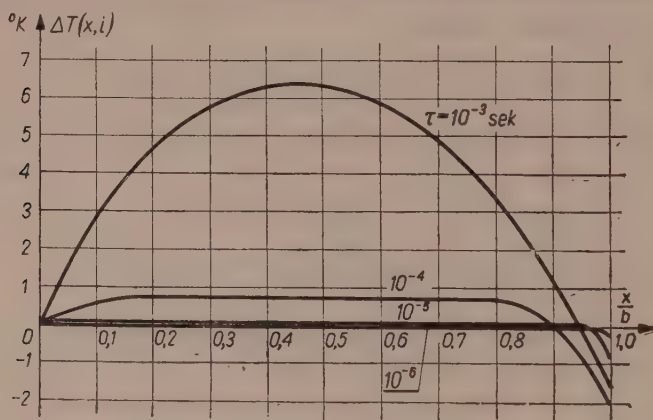
gdzie

T_k — temperatura powierzchni katody [$^{\circ}\text{K}$],

T_0 — temperatura otoczenia katody [$^{\circ}\text{K}$],

ε — emisyjność cieplna katody,

$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-12} \text{ W/cm}^2 \text{ } ^{\circ}\text{K}^4$ — stała promieniowania.



Rys. 2. Zależność $\Delta T(x, i)$ dla przeciętnej katody tlenkowej przy $i = 5 \text{ A/cm}^2$ dla różnych czasów trwania impulsu (τ) — wg [3].

Z rysunku 2 widać, że obliczone przez Rohdego wartości $T(x, i)$ dla przeciętnej katody są małe mimo założonego dość dużego obciążenia $i = 5 \text{ A/cm}^2$. Wpływ ich na właściwości fizyczne katody (ρ , λ , φ , ε , T_k) można pominąć. Nie do pominięcia jednak mogą być siły mechaniczne F_T wynikające z niejednorodności rozkładu temperatury wzdłuż osi x — normalnej do powierzchni rdzenia. Maksymalne ich wartości będą oczywiście przy rdzeniu i przy powierzchni katody.

Nietrudno się przekonać, że dla zwiększenia jednorodności rozkładu temperatury $T(x, i)$ — a tym samym dla zmniejszenia sił (F_T mogących spowodować iskrzenie katody — należy:

- a) zmniejszyć wartości parametrów i^1 , τ , ρ^2 ,
- b) zwiększyć wartości parametrów c , g , λ^3 .

Dla zmniejszenia podatności katody na iskrzenie należy również polepszyć spistość warstwy emisyjnej i przyczepność jej do rdzenia. Zagadnienie to nie jest dotychczas dokładnie zbadane. Wiadomo jednak, że poważny wpływ mają następujące czynniki:

1. przygotowanie techno-chemiczne rdzenia,
2. narastanie warstwy pośredniej⁴,
3. dobór procesu formowania katody⁵,
4. powierzchnia styku kryształów między sobą oraz z materiałem rdzenia, którą można zwiększyć przez:
 - a) spieczenie na powierzchni rdzenia drobnoziarnistego proszku niklu przed pokryciem go pastą emisyjną,
 - b) zastosowanie rdzeni prasowanych z proszku niklu,
 - c) zmniejszenie porowatości pokrycia,
 - d) zastosowanie węglanów drobnoziarnistych o możliwie małym wzroście kryształów przy obróbce termicznej katody; ponieważ węglany strącone sodą wykazują znacznie większy wzrost kryształów niż węglany strącone węglanem amonu [13], zalecić należy stosowanie tych ostatnich.

4. WPŁYW NIEJEDNORODNOŚCI WŁAŚCIWOŚCI KATODY

Przyjęte założenie jednorodności właściwości warstwy emisyjnej w rzeczywistości nie jest jednak spełnione. Wynika to:

1. z niejednorodności właściwości strukturalnych warstwy emisyjnej,
2. z niejednorodności temperatury rdzenia wskutek intensywniejszego oziębiania jego końców niż środka (rys. 3).

¹ Uwzględnić tu należy również przetężenia w stanie nieustalonym przy włączeniu zasilania lampy. Dla ograniczenia prądu włączenia w układach prostujących ogranicza się maksymalną pojemność filtru oraz minimalną oporność transformatora zasilającego obwód anodowy.

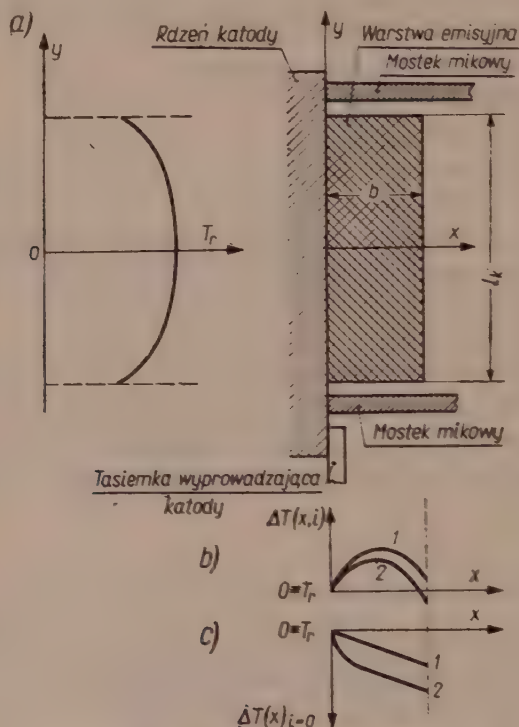
² $\rho = \rho_0 \exp(e\chi/kT)$, gdzie $\chi = \varphi - \psi$, czyli $\rho = F(T, \varphi)$ — dla zmniejszenia ρ należy więc zwiększyć aktywność katody (zmniejszyć χ) oraz podwyższyć temperaturę pracy katody (T). Ponadto ρ można zmniejszyć przez dodanie w warstwie emisyjnej domieszki proszku metalicznego (np. niklu), co też jest stosowane w praktyce.

³ $\lambda = F(T, \rho)$, gdyż $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$, gdzie λ_2 podlega prawu Wiedemanna — Franza, czyli $\lambda = \lambda_1 + A(k/e)^2 T/\rho$. Wzrost ρ powoduje więc zmniejszenie λ .

⁴ Narastanie warstwy pośredniej Ba_2SiO_4 powoduje pogorszenie przyczepności warstwy emisyjnej do rdzenia. W przypadku rdzeni ze stopu NiW narastająca warstwa pośrednia Ba_3WO_6 nie powoduje tej wady.

⁵ H. Penotet [9] zaleca podwyższenie temperatury katody w pierwszej fazie jej formowania.

3. z zachodzących przy przepływie prądu zmian koncentracji donorów w warstwie przypowierzchniowej katody [6], [7],
 4. z narastania warstwy pośredniej o dużej oporności.
- Rozpatrzmy kolejno wpływ tych czynników.



Rys. 3. Przykład rozkładu temperatury katody tlenkowej.

- a) $T_r(y) = T(x, y)_{x=0}$; b) $\Delta T(x, i)$ przy dogrzewaniu (1) i chłodzeniu (2) powierzchni katody;
 c) $\Delta T(x)_{i=0}$ w przypadku jednorodnej warstwy emisyjnej (1) oraz przy uwzględnieniu narastania warstwy pośredniej (2).

4.1. Niejednorodność temperatury rdzenia i właściwości strukturalnych warstwy emisyjnej.

Temperatura katody — szczególnie w przypadku katod długich — nie jest jednorodna nawet przy $i=0$. Wynika to z intensywniejszego oziębiania jej końców niż środka⁶. Istnieje również pewien rozrzut porowatości pokrycia, wynikający z rozrzutu kształtu i wielkości kryształów tlenków. Ponadto powierzchnia katody jest rozwinięta i grubość pokrycia (b) nie jest stała wzdłuż katody. W rezultacie otrzymamy:

⁶ Różnica temperatury środka i końców katody jest nieraz rzędu 100°C.

$$g=g(x, y, z), \quad \varrho=\varrho(x, y, z), \quad \lambda=\lambda(x, y, z)$$

$$T_r=T_r(y, z), \quad \varphi=\varphi(y, z), \quad \varepsilon=\varepsilon(y, z) \quad \text{oraz} \quad T_k=T_k(y, z).$$

Równanie (5) może być zatem wykorzystane tylko dla $y = \text{const.}$, $z = \text{const.}$, przy czym należy przyjąć wartości średnie $\bar{g}(x)$, $\bar{\varrho}(x)$, $\bar{\lambda}(x)$.

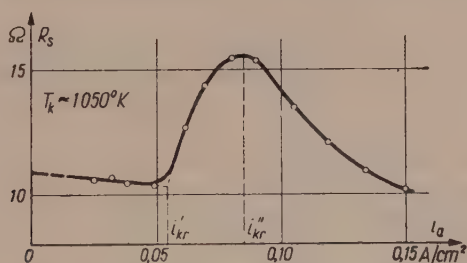
W przypadku ogólnym będzie:

$$T(x, i) - T_r = \Delta T(x, i) - \Delta T(x)_{i=0} = F(y, z). \quad (6)$$

Wskutek niejednorodności temperatury w płaszczyźnie yz powstaną siły $\mathcal{F}_T(y, z)$, sumujące się geometrycznie z siłami $\mathcal{F}_T(x)$ wynikającymi z niejednorodności rozkładu temperatury wzdłuż osi x . Rezultatem tego będzie wzrost prawdopodobieństwa iskrzenia katody.

4.2. Zmiany koncentracji donorów w warstwie przy powierzchniowej katody.

Przy przepływie prądu przez katodę zachodzą zmiany koncentracji donorów w warstwie przypowierzchniowej, co zmienia energię aktywacji tej warstwy, a zatem $\varphi = \varphi(i)$ — [6]. Powoduje to zależność wartości $\bar{\varrho}(x)_{x=b}$ oraz $\bar{\lambda}(x)_{x=b}$ od obciążenia (i). Na rysunku 4 podano zależność



Rys. 4. Przykład zależności oporności skrośnej katody tlenkowej (R_s) od obciążenia (i), otrzymany metodą doświadczalno-rachunkową dla diody UY1N.

$R_s = \frac{b}{F_k} \cdot \bar{\varrho}(x)_{x=b} = F(i)$ otrzymaną metodą doświadczalno-rachunkową. Różnić tu można 3 zakresy:

- 1) $i > i'_{kr} - R_s$ nieco maleje, co należy tłumaczyć zachodzącą aktywacją elektrolityczną katody. Zmiany R_s nie są duże i można przyjąć $R_s = \text{const}$ oraz $\varphi = \text{const}$,
- 2) $i'_{kr} < i < i''_{kr} - R_s$ rośnie; tłumaczyć to należy wzrostem ϱ warstwy przypowierzchniowej w wyniku zachodzącego zubożenia jej w donory, powodującego wzrost φ . Max. wartości R_s i φ jest dla $i = i''_{kr}$ 7);

7 Przyjmując uproszczony warunek $i''_{kr} R_{s \max} = i'_{kr} \varphi_{\max}$ otrzymano z rys. 4 $\varphi_{\max} = 2,6$ V, co w przybliżeniu odpowiada danym Nergaarda [6], który dla BaO przyjął $\varphi_{\max} = 2,9$ V.

3) $i > i''_{kr} - R_s$ maleje, przy czym sprawdza się zależność $-\Delta \ln R_s \sim i^2 R_s$, co wskazuje na zachodzące dogrzewanie katody.

Dla określenia wartości krytycznej i''_{kr} rozpatrzmy równanie (5) dla $x = b$. Dla uproszczenia zapisów przyjmijmy oznaczenia

$$\bar{g}(x)_{x=b} = \bar{g}, \quad \bar{\varrho}(x)_{x=b} = \bar{\varrho}, \quad \bar{\lambda}(x)_{x=b} = \bar{\lambda}.$$

Z rysunku 1 mamy $A(u)_{x=b} \approx 0$, $B(v)_{x=b} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} = 1,128$.

Dla $x = b$ przy $y = \text{const}$ równanie (5) przyjmuje postać

$$T(x, i)_{x=b} - T_r = T_k - T_r = \frac{i^2 \tau}{c\bar{g}} \cdot \bar{\varrho} - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{i\sqrt{\tau}}{\sqrt{c\bar{g}\bar{\lambda}}} \varphi - \frac{b\sigma\varepsilon}{\bar{\lambda}} T_k^4. \quad (7)$$

Różniczkując równanie (7) otrzymamy

$$\frac{d(T_k - T_r)}{di} = A_1 + A_2 \frac{d\varphi}{di} + A_3 \frac{d\bar{\varrho}}{di} + A_4 \frac{d\bar{\lambda}}{di} + A_5 \frac{dT_k}{di}, \quad (8)$$

gdzie A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 są odpowiednimi pochodnymi cząstkowymi równania (7).

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= 2 \sqrt{\frac{\tau}{c\bar{g}}} \left(\frac{\bar{\varrho}}{\sqrt{c\bar{g}}} i \sqrt{\tau} - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\varphi}{\sqrt{\bar{\lambda}}} \right), \\ A_2 &= - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{i\sqrt{\tau}}{\sqrt{c\bar{g}\bar{\lambda}}}, \\ A_3 &= i^2 \tau / c\bar{g} \\ A_4 &= \frac{1}{\bar{\lambda}} \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{i\sqrt{\tau}}{\sqrt{c\bar{g}\bar{\lambda}}} \varphi + b\sigma \frac{\varepsilon}{\bar{\lambda}} T_k^4 \right), \\ A_5 &= - \frac{b}{\bar{\lambda}} p_r \left(\frac{4}{T_k} + \frac{d \ln \varepsilon}{dT_k} \right). \end{aligned} \right\} \quad (8a)$$

Ale $\frac{d}{di} (T_k - T_r) = \frac{dT_k}{di}$, gdyż $dT_r/di = 0$, zatem:

$$dT_k/di = \frac{1}{1 - A_5} \left(A_1 + A_2 \frac{d\varphi}{di} + A_3 \frac{d\bar{\varrho}}{di} + A_4 \frac{d\bar{\lambda}}{di} \right). \quad (9)$$

Dla $i = i''_{kr}$ mamy $\varphi = \varphi_{\max}$, $\bar{\varrho} = \bar{\varrho}_m$, $\bar{\lambda} = \bar{\lambda}_m$,

$$d\varphi/di = d\bar{\varrho}/di = d\bar{\lambda}/di = 0 \quad \text{oraz} \quad dT_k/di = 0.$$

Stąd dla $A_1 = 0$ znajdziemy

$$i''_{kr} = \frac{0,564}{\sqrt{\tau}} \cdot \frac{\varphi_{\max}}{\bar{\varrho}_m} \sqrt{\frac{c\bar{g}}{\bar{\lambda}_m}}, \quad (10)$$

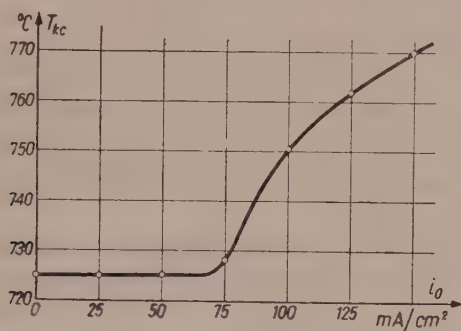
Ponieważ dla danego rodzaju pokrycia $\varphi_{\max} = \text{const}$ oraz $c = \text{const}$, zależność (10) można napisać jako

$$i''_{kr} = \frac{\text{const}}{\sqrt{\tau}} \frac{\sqrt{\bar{g}}}{\bar{\varrho}_m \sqrt{\bar{\lambda}_m}} \quad (10a)$$

Dla $i > i''_{kr}$ będzie $dT_k/di > 0$, zaś dla $i \leq i''_{kr}$ będzie $dT_k/di \leq 0$. O ile dla $i < i''_{kr}$ wartość $\Delta T_k(i)$ może być pominięta, to dla $i > i''_{kr}$ może wystąpić wyraźne dogrzewanie powierzchni katody, zależnie od wartości $(i - i''_{kr})$ oraz od A_5 ⁹. Przykład zależności $T_k(i)$ podano na rys. 5.

Ponieważ $\bar{g} = \bar{g}(y, z)$, $\bar{\varrho} = \bar{\varrho}(y, z)$, $\bar{\lambda} = \bar{\lambda}(y, z)$, zatem

$$i''_{kr} = F(y, z). \quad (11)$$



Rys. 5. Przykład zależności $T_k = F(i)$, otrzymany przez pomiar pirometryczny temperatury obranego punktu katody lampy UY1N.

Przy danym obciążeniu (i) możemy mieć dla sąsiadujących obszarów katody $i_{kr} < i < i''_{kr}$ oraz $i > i''_{kr}$. Wskutek istniejącej zależności $\varphi(i)$ oraz $\bar{\varrho}(i)$ w pierwszym obszarze ($i_{kr} < i < i''_{kr}$) niejednorodność rozkładu temperatury $T(x, i)_{x \approx b}$ wzrośnie, co spowoduje wzrost sił $\mathcal{F}_T(x)$. Obszar drugi będzie dogrzewany. Różnica temperatur tych obszarów pogłębi się jeszcze wskutek istniejącej zależności $i(T_k)$. Efektem tego będzie wzrost sił $\mathcal{F}_T(y, z)$ co prowadzi do iskrzenia katody. Oczywiście na iskrzenie narażony będzie obszar o większej wartości i''_{kr} .

⁸ $\bar{\varrho}_m \sqrt{\bar{\lambda}_m}$ rośnie przy wzroście $\bar{\varrho}_m$, gdyż $\lambda = \lambda_1 + A \left(\frac{k}{e} \right)^2 T \bar{\varrho}$, stąd

$$\bar{\varrho} \sqrt{\bar{\lambda}} = \sqrt{\lambda_1 \bar{\varrho}^2 + A(k/e)^2 T \bar{\varrho}}.$$

⁹ Z równań (8a) i (9) widać, że przyrost wartości bezwzględnej A_5 hamuje dogrzewanie katody. Wartość $|A_5|$ rośnie przy wzroście wartości T_k oraz $d \ln \varepsilon / dT_k$ pożądane więc jest $d^2 \ln \varepsilon / dT_k^2 \geq 0$. Dla zwykłych katod tlenkowych jest $d^2 \ln \varepsilon / dT_k^2 < 0$, dla niklu zaś $d^2 \ln \varepsilon / dT_k^2 \approx 0$. Wynika stąd jeszcze jeden korzystny aspekt stosowania domieszki proszku niklu w warstwie emisyjnej.

Dla uniknięcia wzrostu $(\bar{f}_T(x, y, z))$ — powodującego z kolei wzrost $P(z)$ — musi być w całym obszarze katody $i < i''_{kr}$, czyli $P(i > i''_{kr})$ powinno być dostatecznie małe.

Prawdopodobieństwo $P(i > i''_{kr})$ jest funkcją rosnącą współczynnika

$$\Theta = \frac{i - \bar{i}''_{kr}}{\sigma_{i''_{kr}}}^{10} \quad (12)$$

gdzie

\bar{i}''_{kr} — średnia wartość i_{kr} dla danej katody w danych warunkach jej pracy,

$\sigma_{i''_{kr}}$ — odchylenie średnie wartości i''_{kr} .

Wynika z tego, że dla zmniejszenia $P(z)$ należy:

1. zmniejszyć obciążenie katody ($i \sqrt{\tau}$),¹¹
2. zwiększyć wartość średnią i jednorodność wartości i''_{kr} , co można uzyskać przez zwiększenie wartości i jednorodności temperatury, aktywności i gęstości pokrycia katody oraz przez przeciwdziałanie narastaniu warstwy pośredniej o dużej oporności (przez odpowiedni dobór materiału rdzenia).

Dla uniknięcia wzrostu $P(z)$ w wyniku zachodzących przy przepływie prądu zmian koncentracji donorów w warstwie przypowierzchniowej katody, zalecić należy pracę w zakresie $i < i''_{kr}$, dla którego można przyjąć, że wartości φ , $\bar{\varphi}$, $\bar{\lambda}$ nie zależą od obciążenia.

4.3. Narastanie warstwy pośredniej

Przy zastosowaniu na rdzeń katody niklu czynnego, zawierającego S jako domieszkę aktywną, narasta warstwa pośrednia Ba_2SiO_4 o dużej oporności właściwej. Oporność tej warstwy zależy od zawartości Si w materiale rdzenia oraz od czasu i warunków pracy katody. Przykład zależności oporności skrośnej katody od czasu i warunków pracy podano na rys. 6. Wzrost oporności $\varrho(x)$ powoduje wzrost niejednorodności rozkładu temperatury zarówno w przekroju poprzecznym jak i podłużnym katody¹², rezultatem czego będzie

$$\bar{f}_T(x, y, z) = \mathbf{F}(t)$$

gdzie $\mathbf{F}(t)$ jest funkcją rosnącą.

¹⁰ $\Theta < 0$, gdyż $i < i''_{kr}$.

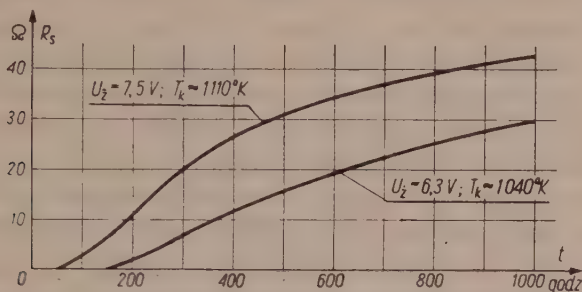
¹¹ Zob. wz. (10a). G. Hermann i S. Wagener [4] uzyskali ok. 3-krotny wzrost obciążenia (i) ograniczonego iskrzeniem katody przy zmniejszeniu τ z 10 μ sek na 1 μ sek, czyli $i_{\max} \sim 1 \sqrt{\tau}$. Freytag [14] zwiększając τ z 1 μ sek na 4 μ sek otrzymał ok. 2-krotne zmniejszenie i_{\max} ograniczonego iskrzeniem katody.

¹² Zob. wz. (4), (5), (10).

Ponadto narastająca warstwa pośrednia Ba_2SiO_4 osłabia przyczepność warstwy emisyjnej do podłoża, co jak wspomniano sprzyja iskrzeniu katody.

Można to przedstawić w postaci relacji

$$P(z) = P\{\bar{f}_T > \bar{f}_P\} = P\{\bar{f}_T(t=0) + \Delta \bar{f}_T(t) > \bar{f}_P(t=0) + \Delta \bar{f}_P(t)\}. \quad (13)$$



Rys. 6. Przykład zależności oporności warstwy pośredniej od czasu i warunków pracy katody. Lampa EF80. Rdzeń katody o zawartości 0,03% Si. Nominalne obciążenie katody prądem stałym [15].

Wynika z tego, że przy dostatecznie małym $P\{\bar{f}_T(t=0) > \bar{f}_P(t=0)\}$ o iskrzeniu katody mogą zdecydować wartości $\Delta \bar{f}_T(t)$ oraz $\Delta \bar{f}_P(t)$ wynikające z narastania warstwy pośredniej.

5. WNIOSKI PRAKTYCZNE Z PRZEPROWADZONYCH ROZWAŻAŃ

Przeprowadzone rozważania wyjaśniają obserwacje doświadczalne podane na wstępie, znane z literatury i z praktyki. Ponadto wynika z nich, że istotny wpływ na podatność katody na iskrzenie mają:

1. dobór węglanów metali ziem alkalicznych,
2. dobór procesu formowania katody,
3. jednorodność temperatury rdzenia wzdłuż katody.

Ze względu na przyczepność warstwy emisyjnej do rdzenia węglany strącone kwaśnym węglanem amonu powinny dawać lepsze rezultaty niż węglany strącone sodą¹³. Ze względu na jednorodność właściwości warstwy emisyjnej kryształy węglanów powinny mieć kształt jak najbardziej zbliżony do kuli. Wynika z tego, że należy się spodziewać wyraźnych różnic podatności katod na iskrzenie w przypadku zastosowania węglanów igiełkowatych strąconych sodą i węglanów kuleczkowatych strąconych kwaśnym węglanem amonu¹⁴.

¹³ Wynika to z mniejszego wzrostu kryształów przy obróbce termicznej katody [13].

¹⁴ Przy niezmienności pozostałych warunków technologicznych i konstrukcji lamp oraz warunków ich pracy.

Węglan wapnia ma większe ciepło właściwe (c) niż węglan baru¹⁵, co przemawia na rzecz stosowania węglanów potrójnych — $(\text{Ba}, \text{Sr}, \text{Ca})\text{CO}_3$ — zamiast węglanów podwójnych — $(\text{Ba}, \text{Sr})\text{CO}_3$. Jednakże wapń jest najlżejszym ze stosowanych metali ziem alkalicznych¹⁶. Ponieważ o podatności katody na iskrzenie decyduje \sqrt{cg} , zatem zysk wynikający z większego ciepła właściwego będzie prawie zniwelowany skutkiem mniejszego ciężaru właściwego. Należy się więc spodziewać, że przy zachowaniu porowatości pokrycia różnica podatności katod na iskrzenie przy zastosowaniu węglanów potrójnych i podwójnych będzie znikoma.

Z przeprowadzonych rozważań teoretycznych wynika celowość stosowania domieszki drobnoziarnistego proszku niklu w paście emisyjnej. Potwierdza się to zarówno w literaturze jak i w praktyce przemysłowej. Dla uzyskania dostatecznie jednorodnej warstwy emisyjnej musi być jednak zapewniony styk każdego kryształu tlenków przynajmniej z jednym ziarnem domieszki niklu. Dla spełnienia tego warunku — nawet przy dostatecznie drobnoziarnistym proszku niklu i dobrym jego wymieszaniu z węglanami — konieczna jest dość duża domieszka proszku niklu w paście emisyjnej¹⁷. Stwarza to dodatkowe kłopoty technologiczne wynikające z sedymentacji niklu podczas natryskiwania katody pastą emisyjną. Ponadto domieszka proszku niklu pogarsza właściwości emisyjne katody. Skłania to do stosowania niewielkiej domieszki drobnoziarnistego proszku niklu (rzędu kilku % ciężaru węglanów), trzeba się jednak wówczas liczyć z wpływem doboru węglanów na jednorodność właściwości warstwy emisyjnej, a zatem i na podatność katody na iskrzenie.

Wnioski powyższe sprawdzono doświadczalnie na lampach UY1N produkowanych w kraju oraz na diodach doświadczalnych opartych na elementach tych lamp. Wykorzystanie w doświadczeniach lamp produkowanych w kraju ułatwiło przeprowadzenie doświadczeń i wykorzystanie ich wyników w produkcji.

$$\left. \begin{array}{l} \text{BaCO}_3 - c = 0,0999 \text{ cal/g}^\circ\text{C} \\ \text{CaCO}_3 - c = 0,203 \text{ „ „} \end{array} \right\} \text{ przy } 0^\circ\text{C [18]}$$

$$\text{BaO} - 3,34 \text{ g/cm}^3, \text{ SrO} - 2,60 \text{ g/cm}^3, \text{ CaO} - 1,76 \text{ g/cm}^3$$

¹⁷ Przy założeniu kulistości i jednorodności wielkości ziaren oraz idealnego wymieszania proszku Ni z węglanami, otrzymamy potrzebny stosunek ciężaru niklu i węglanów

$$\frac{G_{\text{Ni}}}{G_{\text{w}}} > \frac{1}{4} \cdot \frac{g_{\text{Ni}}}{g_{\text{w}}} \left(\frac{d_{\text{Ni}}}{d_{\text{w}}} \right)^3 \left[1 + \frac{d_{\text{Ni}}}{d_{\text{w}}} \right]^{-2}$$

gdzie: g_{Ni} , g_{w} — ciężar właściwy niklu i węglanów,

d_{Ni} , d_{w} — średnica ziarna niklu i węglanów.

W praktyce stosowane są niekiedy domieszki proszku niklu nawet 50% ciężaru węglanów i więcej.

6. WPŁYW DOBORU WĘGLANÓW NA WŁAŚCIWOŚCI EMISYJNE KATOD

Przy stałej temperaturze katody przewodność cieplna (λ) warstwy emisyjnej jest funkcją jej przewodności elektrycznej (γ). Ponieważ przy $T_k = \text{const}$ jest $I_e/\gamma = \text{const}$ czyli $d \lg I_e = -d \lg \gamma$, zatem jednorodność wartości $\lg I_e$ przy $T_k = \text{const}$ jest jednocześnie obrazem jednorodności przewodności elektrycznej (γ) i cieplnej (λ) warstwy emisyjnej.

Wpływ doboru węglanów na wartość i jednorodność prądu emisji określono na podstawie pomiarów czterech serii diod cylindrycznych o katodach tlenkowych różniących tylko doбором węglanów. Przygotowanie pasty emisyjnej, sposób jej nanoszenia na rdzeń (natryskiwanie) oraz wszystkie pozostałe procesy technologiczne były takie same dla wszystkich diod. Zachowano również materiał i rozmiary geometryczne wszystkich elementów diod. Dla uzyskania możliwie dużej jednorodności diody wykonano w warunkach produkcyjnych.

Główne cechy charakterystyczne zastosowanych węglanów podano w tab. 1. Stosując odpowiednie różnice w technologii wytrącania węglanów

Tablica 1

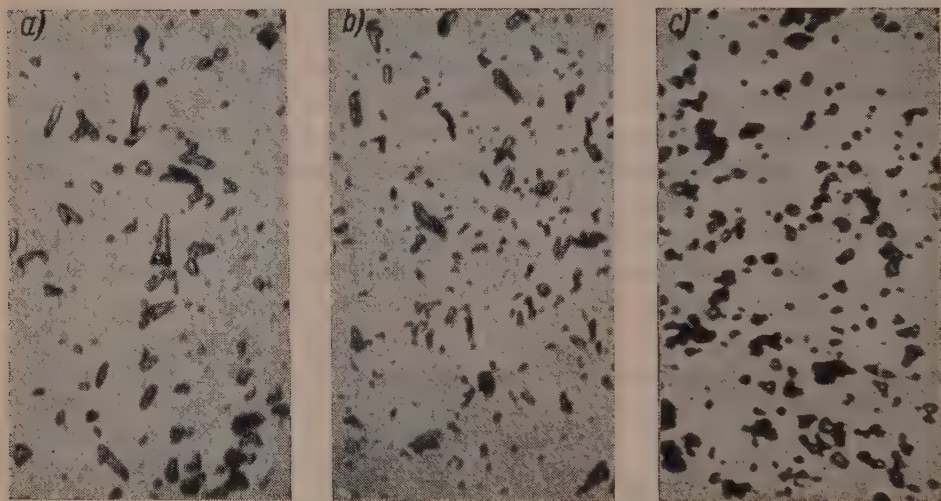
Nr serii	Skład chemiczny węglanów	Wytrącone z azotanów za pomocą	Kształt i średnia wielkość kryształów
1	(Ba,Sr)CO ₃ 50 : 50% wag.	Na ₂ CO ₃ · 10H ₂ O	igielkowate $\bar{a} = 5,95 \mu$ rys. 7a
2	„	„	igielkowate $\bar{a} = 4,7 \mu$ rys. 7b
3	„	NH ₄ HCO ₃	kuleczkowate $\bar{a} = 3,0 \mu$ rys. 7c
4	(Ba,Sr,Ca)CO ₃ 47:43:10% wag.	„	„

nów z roztworu azotanów, uzyskano różnice kształtu i wielkości kryształów, co obrazuje rys. 7. Na podstawie analizy mikroskopowej i opartych na niej obliczeniach statystycznych stwierdzono wyraźne różnice średniej wielkości kryształów ($\bar{a}_1 > \bar{a}_2 > \bar{a}_3 \approx \bar{a}_4$) oraz brak istotnych różnic w jednorodności wielkości kryształów ($v_i = \sigma_i/\bar{a}_i = \text{const}$).

Na podstawie pomiarów próbek losowych katod o liczności po 5 sztuk z każdej serii stwierdzono brak istotnych różnic w rozmiarach geometrycznych i porowatości poszczególnych serii. Współczynnik zmienności $v_x = s_x/\bar{X}$ otrzymano: dla powierzchni katod ok. 1%, zaś dla średniej porowatości katod ok. 1,5%.

Katody pokryto pastą emisyjną tylko na małym odcinku w środku rdzenia — długość pokrycia stanowiła 27,5% całkowitej długości rdzenia. Otrzymane różnice jednorodności prądu emisji w serii uznać można za wskaźnik różnicy jednorodności dla pojedynczych katod reprezentujących dane serie.

Dla porównania właściwości emisyjnych badanych katod mierzono prąd nasycenia (I_e) przy niskiej temperaturze katody, zachowując stałą



Rys. 7. Zdjęcia mikroskopowe kryształów węglanów (pow. $\times 1000$). Duże (a) i małe (b) kryształy igielkowe węglanów strąconych sodą oraz kryształy kuleczkowe (c) węglanów strąconych kwaśnym węglanem amonu.

moc żarzenia $P_z = 200 \pm 0,5$ mW. Napięcie anodowe było $U_a = 5$ V, co pozwala pominąć wpływ gazów szczątkowych w lampie. Wpływ temperatury otoczenia podczas pomiarów wyeliminowano przez obliczenie prądu emisji (I_e) dla temperatury otoczenia 20°C .

$$I_e = I_{e(T_0)} \cdot [1 + D(20 - T_0)], \quad (14)$$

gdzie:

T_0 — temperatury otoczenia podczas pomiaru prądu emisji; mierzono z dokładnością do $0,5^\circ\text{C}$,

$I_{e(T_0)}$ — zmierzona wartość prądu emisji,

$$D = \frac{1}{I_e} \cdot \frac{\Delta I_e}{\Delta T_0} = \left(\frac{5}{4} + \frac{e\varphi_0}{kT_k} \right) \cdot \frac{1}{T_k} \quad (15)$$

gdzie $\frac{e}{k} = 11\,600^\circ\text{K/V}$.

Wartość φ_0 określono dla każdej katody na podstawie pomiarów I_e przy $P'_z = 20$ mW i $P''_z = 150$ mW ze wzoru

$$\varphi_0 = \frac{k}{e} \frac{T'_k \cdot T''_k}{T'_k - T''_k} \left[\ln \frac{I'_e}{I''_e} - \frac{5}{4} \ln \frac{T'_k}{T''_k} \right]. \quad (16)$$

Temperaturę katody zmierzono za pomocą termoelementu dla lampy modelowej otrzymując:

$$\text{przy } P'_z = 200 \text{ mW} \quad T'_k = 523^\circ \text{K},$$

$$\text{przy } P''_z = 150 \text{ mW} \quad T''_k = 487^\circ \text{K}.$$

Po podstawieniu do równania (16) otrzymano

$$\varphi_0 = 1,41 \left(\lg \frac{I'_e}{I''_e} - 0,039 \right) \quad (16a)$$

gdzie:

I'_e — prąd emisji przy $P'_z = 200$ mW,

I''_e — prąd emisji przy $P''_z = 150$ mW.

Rozkład prądu emisji (I_e) jest logarytmo-normalny, co potwierdziła również analiza otrzymanych histogramów. Wobec tego, jako zmienną losową (x) dla analizy statystycznej przyjęto wartość $\lg I_e$ przy $T_0 = 20^\circ \text{C}$. Wykonane serie diod potraktowano jako próbki z populacji o bardzo dużej liczności i dla każdej serii obliczono następujące wielkości

a) wartość średnią $\lg I_e$

$$\overline{\lg I_e} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{m=1}^n \lg I_{em}, \quad (17)$$

gdzie n oznacza licznosc danej serii.

b) estymator nieobciążony odchylenia średniego w populacji:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{m=1}^n (\lg I_{em} - \overline{\lg I_e})^2} \quad (18)$$

c) średnią geometryczną prądu emisji

$$\tilde{I}_e = \sqrt[n]{I_{e1} \cdot I_{e2} \cdot I_{e3} \cdot \dots \cdot I_{en}} = \sqrt[n]{\prod_{m=1}^n I_{em}}, \quad (19)$$

czyli

$$\lg \tilde{I}_e = \overline{\lg I_e}. \quad (19a)$$

Uzyskane wyniki zebrano w tab. 2. Na rys. 8 podano dla badanych serii rozkład teoretyczny wartości $\lg I_e$ wg relacji dla rozkładu normalnego $N(\overline{\lg I_e}, s)$.

Istotność otrzymanych różnic prądu emisji sprawdzono tekstem t-Studenta. Ponieważ próbki były dostatecznie liczne, można rozkład

Studenta zastąpić rozkładem normalnym $N(0,1)$ i różnicę uznać za istotną, gdy spełniony jest warunek:

$$t_{(i-j)} = \frac{|\bar{X}_i - \bar{X}_j|}{\sqrt{(n_i-1)s_i^2 + (n_j-1)s_j^2}} \sqrt{n_i n_j} > t_\alpha, \quad (20)$$

gdzie: i, j — oznaczenia porównywanych serii,

$$\bar{X} = \lg \bar{I}_e$$

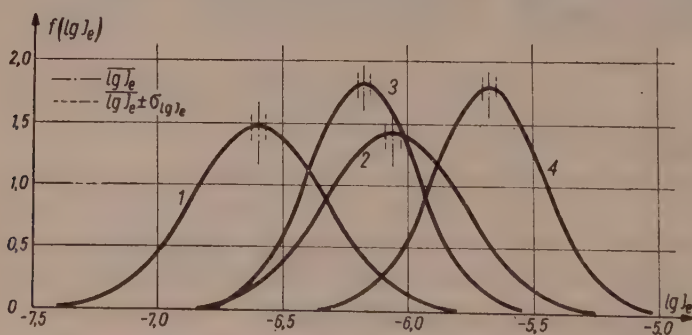
t_α — zmienna rozkładu $N(0,1)$ dla poziomu istotności α .

Tablica 2

Nr serii	Liczność serii n [szt.]	I_e [$10^{-7}A$]	$\lg I_e$	s
1	74	2,48	-6,606	0,270
2	64	8,53	-6,071	0,277
3	100	6,48	-6,188	0,218
4	57	20,5	-5,688	0,220

Przyjmując $\alpha=5\%$ mamy $t_\alpha=1,96$ oraz:

$$t_{(1-2)}=11,4; \quad t_{(2-3)}=3,0; \quad t_{(3-4)}=13,7,$$



Rys. 8. Rozkłady teoretyczne $\lg I_e$ w zależności od doboru węglanów. Oznaczenia krzywych odpowiadają seriom diod wg tab. 1.

Różnice są więc istotne, co pozwala stwierdzić, że:

- prąd emisji jest tym większy im mniejsze są kryształy zastosowanych węglanów ($\tilde{I}_{e_1} > \tilde{I}_{e_2}$),
- węglany o kryształach kuleczkowatych wytrącone NH_4HCO_3 dają prąd emisji nieco mniejszy niż węglany o kryształach igiełkowatych wytrącone Na_2CO_3 ($\tilde{I}_{e_1} < \tilde{I}_{e_2}$, chociaż $\bar{a}_3 < \bar{a}_2$),

c) węglany (Ba, Sr, Ca)CO₃ o proporcji 47 : 43 : 10% wag. dają prąd emisji znacznie większy niż węglany (Ba, Sr)CO₃ o proporcji 50 : 50% wag. ($\tilde{I}_{e_1} \gg \tilde{I}_{e_2}$).

Wynik doświadczenia jest w dobrej zgodności z pracami [4], [13], [16].

Z danych tablicy 2 i z rys. 8 widoczne są różnice jednorodności prądu emisji, sprawdzenia jednak wymaga istotność otrzymanych różnic. Różnicę należy uznać za istotną, jeżeli

$$\text{przy } \frac{s_i}{s_j} > 1 \quad \text{jest} \quad F = \frac{s_i^2}{s_j^2} > F_{\alpha, k_i, k_j}, \quad (21)$$

gdzie F_{α, k_i, k_j} oznacza zmienną rozkładu Fischera dla poziomu istotności $\alpha/2$ przy ilości stopni swobody $k_i = n_i - 1$ oraz $k_j = n_j - 1$.

Przyjmując poziom istotności $\frac{\alpha}{2} = 5\%$ otrzymano:

$$F_{(2-1)} = 1,06 < F_{10,63,73} = 1,49 \text{ — różnica pomijalna,}$$

$$F_{(2-3)} = 1,62 > F_{10,63,99} = 1,45 \text{ — różnica istotna,}$$

$$F_{(4-3)} = 1,02 < F_{10,56,99} = 1,45 \text{ — różnica pomijalna.}$$

Wnioskować z tego należy, że:

- a) jednorodność prądu emisji zależy od kształtu kryształów zastosowanych węglanów, przy braku zależności od ich wielkości średniej i od składu chemicznego,
- b) jednorodność prądu emisji jest tym większa im bardziej kształt kryształów węglanów zbliżony jest do kuli.

Powyższe wnioski odnośnie jednorodności prądu emisji rozszerzyć można na jednorodność przewodności elektrycznej (γ) i cieplnej (λ) warstwy emisyjnej¹⁸, co z kolei będzie miało wpływ na podatność katody na iskrzenie.

7. WPŁYW NIEWIELKIEJ DOMIESZKI PROSZKU NIKLU W PAŚCIE EMISYJNEJ NA WŁAŚCIWOŚCI EMISYJNE KATODY

Porównano wartość i jednorodność prądu emisji dwóch serii diod cylindrycznych o katodach tlenkowych różniących się tylko zawartością drobnodziarnistego proszku niklu w paście emisyjnej. W jednej z nich zastosowano pastę emisyjną z domieszką drobnodziarnistego proszku niklu w ilości 4% ciężaru węglanów, w drugiej natomiast analogiczną pastę emisyjną lecz bez tej domieszki. Drugą serię stanowiły diody omówionej w rozdz. 6 serii Nr 3.

Materiał i rozmiary geometryczne wszystkich elementów diod oraz

¹⁸ Przy $T_k = \text{const}$ $I_0/\gamma = \text{const}$ (czyli $d \lg I_e = -d \lg \gamma$) oraz $\lambda = F(\gamma)$.

wszystkie procesy technologiczne były jednakowe¹⁹. Jednakowe były również warunki pomiarów, szczegółowo omówione w rozdz. 6.

W obu seriach katody pokryto tylko na małym odcinku w środku rdzenia — długość pokrycia stanowiła 27,5% długości rdzenia. Pozwala to pominąć jednorodność rozkładu temperatury rdzenia i otrzymane różnice jednorodności prądu emisji uznać za wskaźnik różnicy jednorodności dla pojedynczych katod reprezentujących dane serie.

Otrzymane wyniki zestawiono w tab. 3.

Tablica 3

Nr serii	Domieszka proszku niklu	Liczność serii n [szt.]	$\lg I_e$	s
3	—	100	−6,188	0,218
5	4% ciężaru węglanów	84	−6,240	0,307

Istotność otrzymanej różnicy prądu emisji sprawdzono wg (20) dla $\alpha=5^0$ i otrzymano

$$t=0,42 < t_{\alpha}=1,96.$$

Wpływ zastosowanej domieszki proszku niklu na wartość prądu emisji jest więc pomijalny.

Istotność otrzymanej różnicy jednorodności prądu emisji sprawdzono wg (21) dla $\frac{\alpha}{2}=5^0$ i otrzymano

$$F=1,98 > F_{10; 83; 99}=1,41.$$

Dowodzi to, że pogorszenia jednorodności prądu emisji — wynikającego z zastosowanej domieszki proszku niklu — nie można pomijać. Wynika z tego, że przy niewielkiej domieszce proszku niklu w paście emisyjnej jednorodność właściwości warstwy emisyjnej — a zatem również podatność katody na iskrzenie²⁰ zależeć będzie od doboru węglanów.

8. WPŁYW TECHNOLOGII KATODY NA JEJ PODATNOŚĆ NA ISKRZENIE

Przyjmując, że iskrzenie katody jest wadą dyskwalifikującą lampę, równanie odpadu lamp na wadę iskrzenia można napisać w postaci

$$\frac{dn}{n} = -P(z) dt, \quad (22)$$

¹⁹ Celem lepszego wymieszania proszku niklu z węglanami, pastę z domieszką proszku Ni mielono dwukrotnie dłużej niż pastę bez tej domieszki. Wszystkie pozostałe procesy technologiczne były jednakowe dla obu serii diod.

²⁰ Uwzględniając, że jednorodność właściwości emisyjnych katody jest obrazem jednorodności przewodności elektrycznej (γ) i cieplnej (λ) warstwy emisyjnej.

lub

$$\ln \frac{n}{n_0} = - \int_0^t P(z) dt. \quad (22a)$$

gdzie:

$P(z)$ — prawdopodobieństwo iskrzenia katody,

t — czas pracy lamp,

n_0 — liczność badanej próbki,

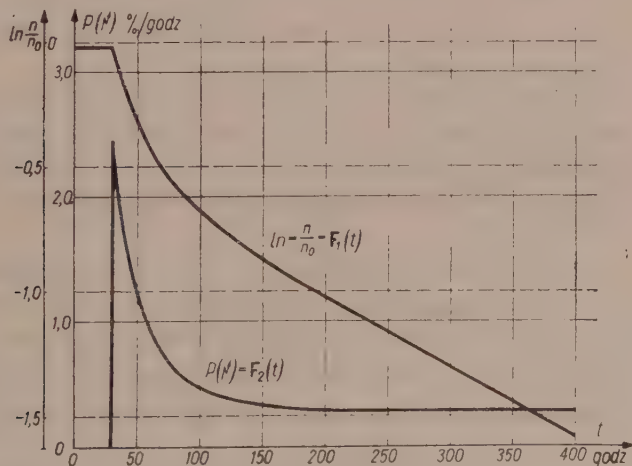
n — liczba lamp pracujących poprawnie (bez iskrzenia katody) po czasie t .

Znając wartości n_0 oraz $n = F(t)$, możemy określić $P(z)$ z relacji

$$P(z) = - \frac{d}{dt} \left(\ln \frac{n}{n_0} \right). \quad (23)$$

Na rys. 9 podano przykład zależności $\ln \frac{n}{n_0} = F_1(t)$ oraz uzyskaną przez jej uśrednienie graficzne zależność $P(z) = F_2(t)$ dla próbki lamp UY1N o liczności $n_0 = 90$ lamp²¹. Iskrzenie katody występowało dopiero po pewnym czasie lamp, czyli:

dla $t < t_0$ $P(z) = 0$, zaś dla $t \geq t_0$ $P(z) > 0$.



Rys. 9. Zależności $\ln \frac{n}{n_0} = F_1(t)$ oraz $P(z) = F_2(t)$ otrzymane dla próbki lamp UY1N o liczności $n_0 = 90$ lamp.

W badanym przypadku przyczyną iskrzenia nie był stan próżni w lampie, gdyż wówczas $\max P(z)$ musiałoby być przy $t=0$. Występo-

²¹ Rdzeń katody był z niklu czynnego o zawartości ok. 0,14% Si.

wanie iskrzenia dopiero po pewnym czasie pracy lamp wskazuje na wpływ narastania warstwy pośredniej, zgodnie z równaniem (13).

Wynika z tego, że czas pracy lamp bez występowania iskrzenia katod może być miarą dla porównania podatności katod na iskrzenie, przy czym musi być zachowana jednakowa konstrukcja lamp oraz warunki ich pracy.

Stosując powyższe kryterium porównano podatność lamp UY1N na iskrzenie katody w zależności od zastosowanej technologii. Wykonano kilka serii lamp UY1N²² różniących się technologią katod, a mianowicie:

- a) dobozem węglanów — różniły się one składem chemicznym, sposobem wytrącania z azotanów (czynnikiem strącającym) oraz kształtem kryształów;
- b) zawartością domieszki proszku Ni w paście emisyjnej, stosując pasty z domieszką 3% proszku Ni i bez tej domieszki;
- c) porowatością warstwy emisyjnej, stosując pokrycie „mokre” lub „suche”;
- d) przepisem formowania katody; lampy pompowano na 30-pozycyjnym automacie pompowym, przy czym katoda była żarzona (formowanie katody) na 10 pozycjach, stosując napięcia żarzenia:
 - a) 80 — 85 — 85 V, na pozostałych zaś pozycjach 90 V,
 - b) 90 V na wszystkich pozycjach²³.

Z każdej serii lamp pobrano próbkę losową o liczności 10 lamp i poddano ją próbie pracy w układzie prostującym. Celem skrócenia czasu badań zaostrzono warunki pracy lamp stosując:

1. większe obciążenie katody — przez zmniejszenie oporności obciążenia,
2. napięcie żarzenia $U_z = 40$ V i 60 V — zmieniane co 2 godziny, zamiast napięcia nominalnego $U_{zn} = 50$ V²⁴,
3. przerywane zasilanie lampy, stosując cykl 15 minut pracy + 5 minut przerwy²⁵.

Jako miarę różnicy podatności katod na iskrzenie przyjęto czas pracy lamp bez występowania iskrzenia w którejkolwiek lampie badanej próbki.

Dla próbek losowych, reprezentujących 2 wybrane serie lamp, porównano wyniki przy pracy w warunkach obostrzonych — przyjętych dla oceny porównawczej podatności katod na iskrzenie — i w normalnych

²² Serie były po 100—200 lamp wykonanych w warunkach produkcyjnych.

²³ Przepis a stosowany był w ZWLE przed doświadczeniami autora. Przepis b zapewnia większą przyczepność warstwy emisyjnej do rdzenia [9].

²⁴ Podwyższenie U_z przyspiesza narastanie warstwy pośredniej (rdzeń był z Ni czynnego — ok. 0,11% Si), obniżanie zaś U_z zwiększa niejednorodność rozkładu temperatury katody, gdyż

$$\frac{d\varrho}{\varrho} = \frac{\text{const}}{T} \cdot \frac{dT}{T}.$$

²⁵ Przeciężenie w stanie nieustalonym sprzyja iskrzeniu katody.

warunkach próby trwałości lamp UY1N. Pozwala to zorientować się w stopniu wprowadzonego obostrzenia.

Wyniki badań zestawiono w tablicy 4. Wykazują one wyraźny wpływ technologii katody — doboru węglanów, porowatości pokrycia, domieszki

Tablica 4

Nr serii	Zmienne cechy katod						Czas pracy bez iskrzenia [godz.]	
	Węgłany			Domie- szka pro- szku Ni	Rodzaj pokry- cia	Przepis formo- wania	w war. obo- strzo- nych	w war. normal- nych
	Kszt. kryszt- alów	Strą- cone	Skład chem.					
1	igielkowe	soda	(BaSr)CO ₃ 50:50% wag.	—	suche	a	26	—
2			„	3%	„	a	45	—
3			„	3%	„	b	74	552
4	kulczkowe	kwaśnym węglanem amonu	„	—	mokre	b	130	—
5			(Ba,Sr,Ca)CO ₃ 47:43:10% wag.	—	„	b	136	—
6			(Ba,Sr)CO ₃ 50:50% wag.	3%	„	b	> 800	> 7.000
7			„	3%	suche	b	178	—

proszku Ni w paście emisyjnej i doboru procesu formowania katody — na jej podatność na iskrzenie, potwierdzając wnioski wynikające z przeprowadzonych rozważań teoretycznych i z doświadczeń omówionych w rozdz. 6 i 7.

9. OCENA OBCIĄŻALNOŚCI,
OGRANICZONEJ WZROSTEM PRAWDOPODOBIENSTWA ISKRZENIA KATOD

Przy uwzględnieniu oporności skrośnej warstwy emisyjnej (R_s) równanie Langmuira można napisać w postaci

$$I_a = G_t (U_{acz} - I_a R_s)^{3/2} = G_{rz} U_{acz}^{3/2} \tag{24}$$

gdzie:

G_t — perweancja teoretyczna, tzn. przy $R_s = 0$ ²⁶,

²⁶ Dla diody cylindrycznej mamy $G_t = 14,6 \cdot 10^{-3} \frac{l_k}{\beta^2 r_a} \text{ mA/V}^{3/2}$,

gdzie $\beta = \ln \frac{r_a}{r_k + x_m} - \frac{2}{5} \ln^2 \frac{r_a}{r_k + x_m} + \frac{11}{120} \ln^3 \frac{r_a}{r_k + x_m} - \dots$ W przypadku $r_a \approx r_k$ (np. dla diody UY1N) wartość x_m można obliczyć jak dla diody płaskiej [17].

Q_{rz} — perweancja rzeczywista, przy $R_s > 0$,

U_{acz} — czynne napięcie anodowe²⁷,

R_s — oporność skrośna warstwy emisyjnej.

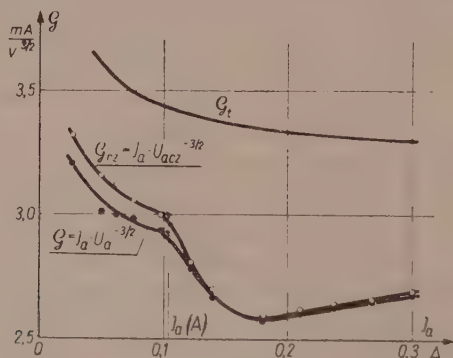
Po odpowiednich przekształceniach wzoru (24) otrzymamy

$$R_s = I_a^{-1/2} \cdot (Q_{rz}^{-2/3} - Q_t^{-2/3}), \quad (25)$$

Zarówno Q_t jak i Q_{rz} są funkcjami obciążenia I_a .

Zależność $Q_t(I_a)$ jest monotoniczną funkcją malejącą²⁸. Wynika z tego, że anomalie przebiegu $R_s(I_a)$ — wywołane zmianami koncentracji donorów w warstwie przypowierzchniowej katody — będą odzwierciedlone w przebiegu $Q_{rz}(I_a)$.

Na rys. 10 poddano przebiegi $Q_t(I_a)$ oraz $Q_{rz}(I_a)$ otrzymane dla diody cylindrycznej typu UY1N. Z rys. 10 widać, że dla $I_a < I_a(A)$ charakter obu tych przebiegów praktycznie się nie różni. Dla $I_a > I_a(A)$ przebieg $Q_{rz}(I_a)$ wykazuje anomalie nie istniejące w przebiegu $Q_t(I_a)$. Tłumaczyć je należy wpływem zachodzących zmian koncentracji donorów w war-



Rys. 10. Przykład zależności perweancji diody od obciążenia. Dioda UY1N.

stwie przypowierzchniowej katody, które jak wykazano w rozdziale 4.2. prowadzą do wzrostu prawdopodobieństwa iskrzenia katody. Wynika z tego, że wartość $I_a(A)$ można przyjąć jako dopuszczalne obciążenie katody, nie powodujące jeszcze wzrostu $P(z)$ wynikającego ze zmian koncentracji donorów w warstwie przypowierzchniowej katody.

²⁷ Dla diody cylindrycznej mamy $U_{acz} = U_a + U_{ht} + U_m + \frac{3}{8} U_T \ln^2 \frac{U_a + U_{ht}}{U_T}$,

gdzie $U_T = 8,62 \cdot 10^{-5} T_k$ oraz $U_m = U_T \ln \frac{i_c}{i_a}$

²⁸ Przy wzroście I_a wartość x_m maleje powodując wzrost wartości β , a w rezultacie zmniejszenie Q_t — zob. odnośnik 26.

Przyjmując $U_a \approx U_{acz}$, na rys. 10 podano przebieg perweacji obliczonej według uproszczonej relacji

$$Q = I_a \cdot U_a^{-3/2}, \quad (26)$$

który charakterem swym i wartością $I_a(A)$ praktycznie nie różni się od dokładniej obliczonego przebiegu $Q_{rz}(I_a)$ — zob. rys. 10. Wynika z tego, że dla określenia wartości $I_a(A)$ — przynajmniej dla porównawczej oceny obciążalności katod — można stosować wzór (26).

Stosując powyższą metodę porównano obciążalność katod różniących się jednorodnością rozkładu temperatury rdzenia wzdłuż katody i rodzajem pokrycia katody.

Wykonano diody cylindryczne różniące się tylko katodą. Rozmiary i materiał rdzenia katody oraz pozostałych elementów diod były te same.

Tablica 5

Nr diody	Długość pokrycia [mm]	Węglany		Domieszka proszku niklu
		strącona z azotanów za pomocą:	kształt kryształów	
1	31,1	$\text{Na}_2\text{CO}_3 \cdot 10\text{H}_2\text{O}$	igielkowaty	—
2	10,2	„	„	—
3	10,2	NH_4HCO_3	kuleczkowaty	—
4	10,2	„	„	4%
5	31,1	„	„	3%

Uwaga: Długość rdzenia katody 37 mm

Zachowano również bez zmian wszystkie procesy technologiczne.

Katody różniły się:

- długością pokrycia — zastosowano katody o pokryciu „długim” (84% długości rdzenia) oraz katody o pokryciu „krótkim” (27,5% długości rdzenia);
- doborem węglanów — zachowując ten sam skład chemiczny, przygotowanie pasty emisyjnej oraz wszystkie pozostałe procesy przygotowania katod, zastosowano:
 - węglany o kryształach igielkowatych strącone sodą,
 - węglany o kryształach kuleczkowatych strącone kwaśnym węglanem amonu;
- domieszką proszku Ni w paście emisyjnej — zastosowano pasty z domieszką drobnoziarnistego proszku Ni i bez tej domieszki.

Zestawienie badanych diod podano w tablicy 5.

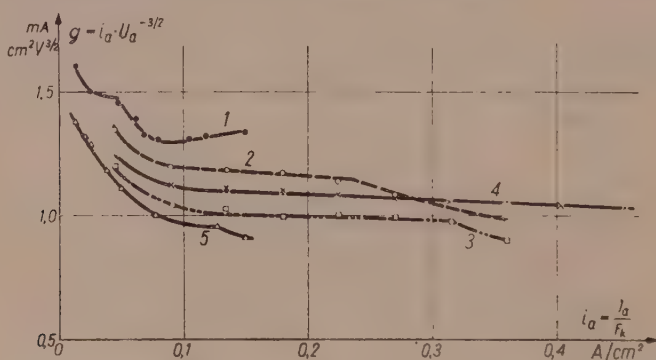
Na podstawie pomiarów charakterystyki $I_a = F(U_a)$ obliczono zależność

$$g(i_a) = i_a U_a^{-3/2} = \frac{I_a}{F_k} U_a^{-3/2}$$

i porównano wartości $i_a(A)$ otrzymane dla poszczególnych katod. Pomiary wykonano przy stałej temperaturze średniej katody $T_k \approx 1050^\circ \text{K}$ ²⁹.

Otrzymane wyniki podano na rys. 11. Wynika z nich, że:

1. potwierdza się wykazany w poprzednich rozdziałach wpływ doboru węglanów,
2. potwierdza się wykazany w rozdz. 8. wpływ domieszki proszku Ni w paście emisyjnej,
3. potwierdza się wynikający z rozważań teoretycznych wpływ jednorodności temperatury rdzenia wzdłuż katody.



Rys. 11. Zależność perweancji diody od obciążenia dla różnych katod. Oznaczenia krzywych odpowiadają numerom diod wg tab. 5.

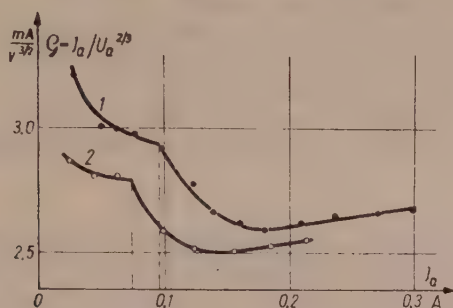
Celem zbadania wpływu narastania oporności warstwy pośredniej na wartość $I_a(A)$ diodę Nr 1 poddano starzeniu przez 100 godzin przy przeżarzeniu 30%, bez poboru prądu³⁰. Ponieważ rdzeń katody zawierał dużą domieszkę krzemu (ok. 0,11%), zapewniło to wyraźny wzrost oporności warstwy pośredniej.

Na rysunku 12 porównano obliczone na podstawie pomiarów przebiegi $g(I_a)$ według wzoru (26) przed starzeniem i po starzeniu. Widoczne jest, że w wyniku wzrostu oporności warstwy pośredniej wartość kry-

²⁹ Dla pokryć „długich” uwzględniono niejednorodność temperatury wzdłuż katody, określoną na podstawie uprzednich pomiarów temperatury katody w środku i w końcu pokrycia.

³⁰ Nominalne napięcie żarzenia 50 V, zaś podczas starzenia zastosowano $U_z = 65 \text{ V}$, przy $U_a = 0 \text{ V}$ — warunki sprzyjające szybkiemu wzrostowi oporności warstwy pośredniej.

tyczna $I_a(A)$ maleje, co jest równoznaczne ze wzrostem podatności katody na iskrzenie. Pozostaje to w dobrej zgodności z wnioskami wynikającymi z przeprowadzonych rozważań teoretycznych.



Rys. 12. Zależność perweancji diody od obciążenia. Krzywa 1 — przed starzeniem; krzywa 2 — po starzeniu.

10. ZAKOŃCZENIE

Wnioski praktyczne wynikające z przeprowadzonych rozważań i omówionych doświadczeń wykorzystano w produkcji lamp w przemyśle krajowym z rezultatem pozytywnym.

Na zakończenie pragnę podziękować Dyrekcji PIE i Dyrekcji ZWLE za umożliwienie badań, doc. B. Paszkowskiemu za cenne dyskusje w toku pracy oraz mgr. H. Derko i inż. M. Korczowi za pomoc w realizacji doświadczeń.

Przemysłowy Instytut Elektroniki.

WYKAZ LITERATURY

podano przez autora w kolejności tekstu

1. Mie K.: *Über das Spratzen in Elektronenröhren*, Telefunken Bericht, VIII. 1940.
2. Rohde: *Kathodenspratzen*, Telefunken Bericht, VI. 1941.
3. Rohde: *Die termischen Verhältnisse an Oxydkathoden*, Telefunken Bericht, I. 1943.
4. Hermann G., Wagener S.: *Die Oxdkathode*, B. 2 — Technik und Physik, 2. Auflage, Leipzig 1950.
5. Coomes E. A.: *Appl. Phys.*, 17, 8, 647 (1946).
6. Nergaard L. S.: *RCA Rev.* 13, 4, 464 (1952).
7. Nergaard L. S.: *Halbleiterprobleme* — W. Schottky, B. 3, s. 154—202, Braunschweig 1956.
8. Dubois A.: *Le Vide*, Nr 54, Novembre 1954.
9. Penotet H.: *Le Vide*, Nr 55, Janvier 1955; tłum. polskie — *Elektronika*, Nr 2/3, 1956.

10. Berthaud M.: Le Vide, Nr 52/53, Septembre 1954.
11. Huber H., Charles D.: Le Vide, Nr 54, Novembre 1954.
12. Charles D., Huber H.: Le Vide, Nr 54, Novembre 1954.
13. Wright D. A.: Le Vide, Nr 51, Mai 1954.
14. Freytag J. P.: Vacuum, 10, 1/2, 40 (1960).
15. Dahlke W.: Le Vide, Nr 55, Janvier 1955.
16. Amakasu K., Fukase M., Sekine E., Takanashi M., Noaki H., Hirota S.: Le Vide, Nr 51, Mai 1954.
17. Paszkowski B.: Elektronika, Nr 12 (14), 432 (1956).
18. Jeżewski M., Kalisz J.: Tablice wielkości fizycznych, PWN, Warszawa 1957.

ИСКРЕНИЕ ОКСИДНЫХ КАТОДОВ ЭЛЕКТРОВАКУУМНЫХ ПРИБОРОВ В РЕЗУЛЬТАТЕ НАГРУЗКИ ЭМИССИОННОГО СЛОЯ ТОКОМ

В работе рассмотрен вопрос искрения оксидных катодов электровакуумных приборов как следствие физических явлений, происходящих в эмиссионном слое при нагрузке его током, предполагая хороший вакуум в приборе и пренебрегая влиянием межэлектродного напряжения. Принят и доказан тезис, что о податливости оксидного катода к искрению решают: неоднородность распределения его температуры, а также компактность эмиссионного слоя и приставание его к керну.

Записать это можно в виде уравнения:

$$P(\zeta) = P\{\mathcal{F}_T > \mathcal{F}_P\}$$

где:

$P(\zeta)$ — вероятность искрения катода,

\mathcal{F}_T — силы, возрастающие с ростом неоднородности распределения температуры в эмиссионном слое, стремящиеся вырвать частицу эмиссионного слоя,

\mathcal{F}_P — силы, возрастающие с ростом компактности эмиссионного слоя и приставания его к керну, противодействующие силам \mathcal{F}_T ,

$P\{\mathcal{F}_T > \mathcal{F}_P\}$ — вероятность случая $\mathcal{F}_T > \mathcal{F}_P$.

В работе рассмотрены факторы, решающие о однородности распределения температуры в эмиссионном слое, а также о его компактности и приставании к керну. В приведенном анализе показано, что принятый тезис, выясняем все известные до сих пор автору наблюдения, касающиеся влияния технологии и условий работы оксидного катода на его склонность к искрению, как температура, пористость, активность катода, нарастание промежуточного слоя Ba_2SiO добавка никелевого порошка в эмиссионном слое или спекание его на керне, а также нагрузка катода током и длина импульса тока.

Кроме того, в проведенном анализе показано существенное влияние однородности распределения температуры керна по катоду, а также влияние рода карбонатов щелочноземельных металлов и режима формирования катода (перехода карбонатов в оксиды). Подробно обсуждены эксперименты, проведенные для проверки вышеуказанных выводов.

OXIDE-COATED CATHODE SPUTTERING IN VACUUM TUBES AS RESULT OF CURRENT PASSING THROUGH EMITTING LAYER

The paper deals with oxide-coated cathode sputtering in vacuum tubes caused by physical phenomena arising in emitting layer during the flow of current. Assuming the satisfactory vacuum in the tube and neglecting the influence of the anode voltages, a thesis has been admitted and proved that heterogeneity of cathode temperature, and the compactness of emitting layer and its stickiness to core are the decisive factors, as far as the inclination to the cathode sputtering is concerned.

This may be expressed by the equation

$$P(\varphi) = P(\mathcal{F}_T > \mathcal{F}_P),$$

where

$P(\varphi)$ = probability of cathode sputtering,

\mathcal{F}_T = forces (mechanical) which rise with increasing heterogeneity of temperature distribution in emitting layer seeking to tear off a small part from the substrate,

\mathcal{F}_P = forces (mechanical) counteracting to \mathcal{F}_T which rise with increasing compactness of emitting layer and its stickiness to core,

$P(\mathcal{F}_T > \mathcal{F}_P)$ = probability of event $\mathcal{F}_T > \mathcal{F}_P$.

The factors are discussed which have an influence on heterogeneity of temperature distribution in emitting layer, compactness of emitting layer and its stickiness to core.

The considerations made show that the thesis permits to explain all the observations familiar to the author, concerned with the influence of the technology and the operation conditions of oxide — coated cathode on its inclination to sputtering. These are: temperature, coating porosity and activity of cathode, growth of interface layer Ba_2SiO_4 , addition of nickel powder in emitting layer or its sintering on core, as well as current density and impulse duration.

Moreover, the performed analysis reveals the influence of the homogeneity of core temperature distribution along the cathode as well as of choice of alkaline earth carbonates and of the process their conversion into oxides.

The experiments carried out are discussed in detail which control the correctness of the above conclusions.

621.395.625.3.

B. URBĄŃSKI

Obwód magnetyczny głowicy odczytującej i zapisującej sygnały wielkiej częstotliwości

Rękopis dostarczono 6. 7. 1960.

W pracy przeprowadzono analizę obwodu magnetycznego głowicy odczytującej i zapisującej sygnały wielkiej częstotliwości na taśmach magnetycznych. Określono wpływ zjawisk jakie zachodzą na powierzchni styku taśmy z głowicą i rozplywu strumienia magnetycznego w wewnętrznych obwodach głowicy na jej zespoloną sprawność magnetyczną.

Podano wyniki badań opracowanych z krajowych materiałów magnetycznych głowic zdolnych do zapisywania i odczytywania sygnałów o częstotliwościach od 1 kHz do 1 MHz.

1. WSTĘP

Głowice magnetyczne stanowią podstawowy element wszelkich urządzeń do zapisywania sygnałów na nośnikach magnetycznych. Głowice zapisujące i odczytujące sygnały o częstotliwości akustycznej stosowane są od szeregu lat w urządzeniach do nagrywania dźwięków. Ostatnio coraz częściej zapisuje się na taśmach magnetycznych sygnały wielkiej częstotliwości dla celów pomiarowych, zdalnego sterowania, automatyzacji, w elektronowych maszynach liczących, a ostatnio dla rejestracji programu telewizyjnego.

2. GŁOWICA ODCZYTUJĄCA JAKO PRZETWORNIK

Punktem wyjściowym analizy głowicy odczytującej sygnały wielkiej częstotliwości jest stwierdzenie, że głowica odczytująca jest przetwornikiem, który wzbudzany polem magnetycznym na taśmie przetwarza energię mechaniczną, przesuwałającego taśmę mechanizmu przesuwu na energię elektryczną. Użyteczna część energii elektrycznej głowicy oraz wszystkie straty energii występujące w rdzeniu i w obwodzie elektrycznym głowicy powodują hamowanie ruchu przesuwałającej się przed głowicą taśmy. Przesuwanie taśmy, abstrahując od mechanicznego oporu tarcia taśmy o głowicę, napotyka na dodatkową siłę oporu

$$F = \frac{P}{v} 10^5 \quad (1)$$

gdzie:

F — siła hamowania w dynach,

P — całkowita moc tracona w głowicy w watach,

v — prędkość przesuwu taśmy w m/s.

Siła ta jest pokonywana z łatwością przez mechanizm przesuwu taśmy, ponieważ moc silnika przesuwu taśmy występuje w nadmiarze i nie potrzebujemy się z nią liczyć. Z tego punktu widzenia zagadnienie strat energetycznych w głowicy nie jest istotne, o ile tylko straty te nie wpływają ujemnie na wielkość użytecznej mocy elektrycznej otrzymanej z głowicy.

Wielkością, która sprzęga układ mechaniczny przesuwu taśmy z układem elektrycznym głowicy odczytującej, jest strumień magnetyczny zapisany na taśmie. Głowica odczytująca powinna być tak skonstruowana, aby sprzężenie obwodu elektrycznego ze strumieniem magnetycznym taśmy było jak największe. Istotna więc dla działania głowicy odczytującej jest jej sprawność magnetyczna określająca wielkość użytecznego strumienia magnetycznego przenikającego z taśmy w rdzeń głowicy i indukującego w jej uzwojeniu siłę elektromotoryczną.

3. SPRAWNOŚĆ MAGNETYCZNA GŁOWICY ODCZYTUJĄCEJ

Sprawność magnetyczna głowicy odczytującej wyraża się ogólnym wzorem:

$$\hat{\eta} = \frac{\hat{\Phi}_u}{\hat{\Phi}_0} = \frac{1}{1 + \left(\frac{\hat{Z}_R}{R_Z} \right)} \quad (2)$$

gdzie:

$\hat{\Phi}_u$ — strumień w rdzeniu głowicy,

$\hat{\Phi}_0$ — strumień zapisany na taśmie,

\hat{Z}_R — magnetyczna oporność pozorna rdzenia głowicy,

R_Z — magnetyczna oporność rozproszenia przez drogę w szczelinie, wokół szczeliny i między ramionami rdzenia.

Obliczenie przebiegu sprawności magnetycznej w funkcji częstotliwości wymaga znajomości zależności \hat{Z}_R i R_Z od częstotliwości. Oporność magnetyczną rdzenia należy traktować jako oporność zespoloną posiadającą oprócz części rzeczywistej jeszcze część urojoną, która pochodzi od strat energii w rdzeniu magnetycznym. Ta urojona część oporności zależy od częstotliwości strumienia magnetycznego. Wzrost oporności magnetycznej rdzenia z częstotliwością jest spowodowany stratami histerezy, stratami na prądy wirowe i przepływem prądu w uzwojeniu głowicy.

Oporność magnetyczna rdzenia spowodowana przez histerezę:

Przy założeniu małych natężeń pól w rdzeniu magnetycznym można określić wg Feldkellera [1] zespoloną przenikalność materiału rdzenia wzorem

$$\hat{\mu} = \mu_{LR} - j\mu_{RR} = \mu_A + 2vH_m - j \frac{8}{3\pi} vH_m, \quad (3)$$

gdzie:

μ_A — przenikalność początkowa,

v — stała Rayleigha,

H_m — maksymalne natężenie pola.

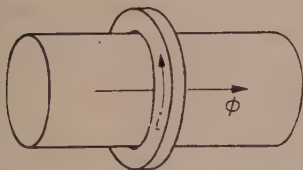
Obwód magnetyczny o długości l i o przekroju q ma oporność magnetyczną

$$\hat{Z}_\mu = \frac{l}{q \cdot \hat{\mu}} \approx \frac{l}{q \cdot \mu_R} + j \frac{8}{3\pi} \cdot \frac{v \cdot \Phi_m}{q^2 \cdot \mu_R^3} \cdot l = R_\mu + jX_\mu \quad (4)$$

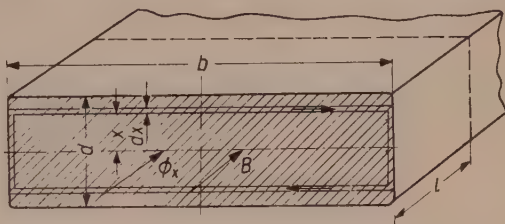
gdzie: $\mu_R = \mu_A + 2v \cdot H_m$.

Oporność magnetyczna rdzenia spowodowana stratami na prądy wirowe

Wpływ prądów wirowych na magnetyczną oporność rdzenia daje się przedstawić na uproszczonym układzie pierścienia metalowego nasuniętego na rdzeń magnetyczny (rys. 1). Gdy oporność elektryczną tego pier-



Rys. 1. Wpływ pierścienia zwierającego na magnetyczną oporność rdzenia.



Rys. 2. Przekrój przez pojedynczą blachę rdzenia magnetycznego.

ścienia oznaczmy przez R i założymy wymuszany za pomocą zewnętrznego źródła przepływ przez pierścień strumienia magnetycznego $\hat{\Phi}$, to dla tego układu możemy napisać równanie

$$\hat{\Phi} \cdot \hat{Z}_m = \frac{0,4\pi}{R} \cdot \frac{d\hat{\Phi}}{dt} \cdot 10^{-8}. \quad (5)$$

Stąd magnetyczna oporność wnoszona w obwód rdzenia przepływem prądu w pierścieniu

$$\hat{Z}_m = j\omega \frac{0,4\pi}{R} \cdot 10^{-8} = j\omega \frac{0,4\pi}{\omega^2 \Phi_{sk}^2} P \cdot 10^8 = jX_m \quad (6)$$

gdzie P — rzeczywista moc wydzielona w pierścieniu.

Dla rdzenia z blach (rys. 2), przy założonym przepływie sinusoidal-

nego strumienia o stałej na całej powierzchni indukcji B , moc strat w całym rdzeniu złożonym z m blach wynosi

$$P = m \frac{2 \cdot l \cdot \omega^2 \cdot B^2 \cdot b}{\varrho} \int_0^{d/2} x^2 dx \cdot 10^{-16} = \frac{d \cdot l \cdot \omega^2 \Phi_{sk}^2}{12 b \cdot \varrho \cdot m} \cdot 10^{-16} \quad (7)$$

gdzie ϱ — oznacza oporność właściwą materiału rdzenia.

Magnetyczną oporność rdzenia otrzymamy podstawiając (7) do (6) jako

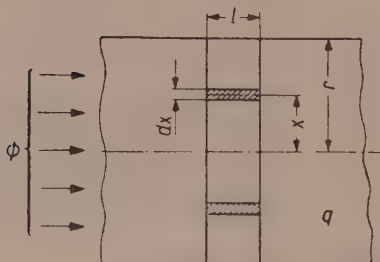
$$jX_m = j\omega \frac{0,4\pi \cdot d \cdot l}{12 b \cdot \varrho \cdot m} \cdot 10^{-8} \approx j\omega \frac{0,1 d \cdot l}{b \cdot \varrho \cdot m} \cdot 10^{-8}. \quad (8)$$

Podobnie dla rdzenia ferrytowego (rys. 3) otrzymamy

$$P = \frac{l}{8\pi\varrho} \cdot \omega^2 \Phi_{sk}^2 \cdot 10^{-16} \quad (9)$$

oraz

$$jX_m = j\omega \frac{1}{20\varrho} \cdot l \cdot 10^{-8}. \quad (10)$$



Rys. 3. Do obliczenia strat na prądy wirowe w rdzeniu ferrytowym.

Wpływ prądu w uzwojeniu głowicy na pozorną oporność magnetyczną rdzenia głowicy

Gdy cewka głowicy zostanie obciążona opornością \hat{Z} i przez jej uzwojenie płynie prąd, to prąd ten powoduje wsteczne oddziaływanie na obwód magnetyczny. To wsteczne oddziaływanie wyraża się zwiększeniem oporności magnetycznej rdzenia głowicy \hat{Z}_e . Z równości spadku napięcia magnetycznego w rdzeniu i siły magnetomotorycznej

$$\hat{\Phi} \cdot \hat{Z}_e = j\omega \cdot 0,4\pi \cdot z^2 \cdot \frac{\hat{\Phi}}{\hat{Z}} \cdot 10^{-8} \quad (11)$$

obliczymy magnetyczną oporność od wstecznego oddziaływania cewki jako

$$\hat{Z}_e = j\omega \cdot 0,4\pi \cdot z^2 \cdot \frac{1}{Z} \cdot 10^{-8}. \quad (12)$$

W przypadku głowic wielkiej częstotliwości pozorna oporność elektryczna \hat{Z} obwodu cewki składa się z oporności rzeczywistej drutu uzwojeń cewki i pojemnościowego obciążenia cewki. Mamy więc

$$\hat{Z}_e = - \frac{0,4\pi \cdot z^2 \cdot \omega^2 \cdot C \cdot 10^{-8}}{1 + \omega^2 R^2 C^2} + j \frac{0,4\pi \cdot z^2 \cdot \omega^3 R \cdot C^2 \cdot 10^{-8}}{1 + \omega^2 R^2 C^2} = R_e + jX_e \quad (13)$$

gdzie:

z — liczba zwojów cewki,

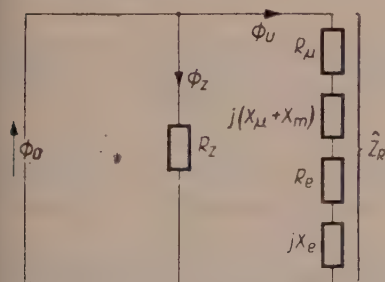
C — pojemność obciążająca cewkę,

R — oporność drutu uzwojeń cewki.

Obliczone w ten sposób wartości składowych rzeczywistych i urojonych oporności magnetycznych rdzenia głowicy pozwalają obliczyć całkowitą oporność magnetyczną rdzenia głowicy

$$\hat{Z}_R = (R_\mu + R_e) + j(X_\mu + X_m + X_e). \quad (14)$$

Ogólny układ zastępczy obwodu magnetycznego głowicy wielkiej częstotliwości uwzględniający wszystkie wyżej wymienione wpływy pokazano na rys. 4.



Rys. 4. Ogólny układ zastępczy obwodu magnetycznego głowicy odczytującej z uwzględnieniem wstecznego oddziaływania prądu w cewce głowicy.

Zgodnie z wzorem (2) na zespoloną sprawność magnetyczną głowicy odczytującej otrzymamy

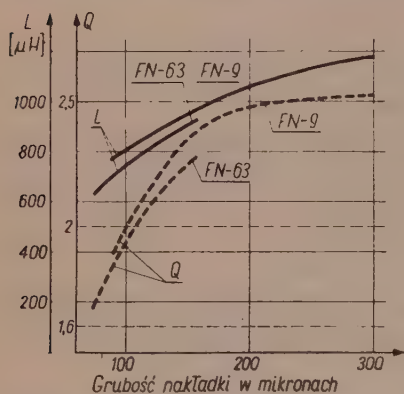
$$|\hat{\eta}| = \frac{R_z}{R_\mu + R_e + R_z} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{X_\mu + X_m + X_e}{R_z + R_\mu + R_e} \right)^2}}. \quad (15)$$

Wzór (15) jest słuszny tylko w tym przypadku, gdy oporność strumienia rozproszenia R_z obwodu magnetycznego jest rzeczywista i stała.

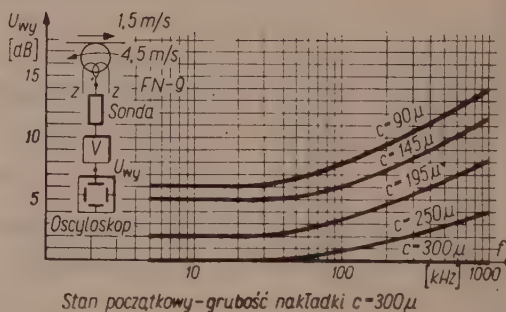
4. SZCZELINY ROBOCZE GŁOWIC WIELKIEJ CZĘSTOTLIWOŚCI

Wartość użytecznego strumienia magnetycznego wnikażącego z taśmy w rdzeń głowicy odczytującej zależy nie tylko od sprawności magnetycznej głowicy, lecz również od długości zapisanej fali, szerokości czynnej szczeliny, skosu szczeliny i odsunięcia taśmy od czoła głowicy [2], [3], [4].

Ze względu na magnetyczną sprawność najodpowiedniejszym materiałem na rdzenie głowic odczytujących sygnały wielkich częstotliwości są ferryty [5]. Rdzenie ferrytowe wymagają jednak nałożenia na czoło głowicy nakładek — blaszek z mumetalu, permalloyu lub alfenolu, w celu uzyskania dostatecznie wąskich szczelin roboczych głowic. Zbadano wpływ grubości nakładek na indukcyjność i skuteczność głowicy, stwierdzając jak z maleniem grubości nakładki maleje indukcyjność głowicy (rys. 5) oraz zmienia się skuteczność głowicy (rys. 6). Na podstawie przebiegu skuteczności głowicy w funkcji grubości nakładki można wyznaczyć optymalną grubość nakładki ze względu na kompromis między



Rys. 5. Przebieg indukcyjności i dobroci głowic ferrytowych z nakładkami ze zmianą grubości nakładki. Pomiary dokonane przy 1000 Hz.



Rys. 6. Przebieg charakterystyki częstotliwościowej skuteczności głowicy o różnych grubościach nakładek.

największą skutecznością a najdłuższym czasem użytkowania głowicy (przy średnim ścieraniu ok. 5μ w ciągu 10 godzin pracy czas użytkowania wynosi 100 do 200 godzin).

Szczeliny robocze fonicznych głowic magnetycznych są z reguły wypełnione wkładkami z folii berylowej, miedzianej lub fosforobrazowej. Wkładka, z jednej strony, zapobiega wypełnieniu się szczeliny kurzem i proszkami magnetycznymi ścieranymi z taśmy, z drugiej zaś strony zwiększając oporność drogi magnetycznej strumienia przez szczelinę poprawia sprawność magnetyczną głowicy.

Przy pracy w pasmie wielkich częstotliwości strumienie magnetyczne w rdzeniu głowicy, a więc i przenikające wkładkę mają znaczną częstotliwość. We wkładce wzbudzone są duże SEM, powodujące przepływ prądów wirowych i związane z tym duże straty mocy.

Dla głowicy pierścieniowej, toroidalnej, z wkładką o przekroju kołowym (rys. 7) moc strat na prądy wirowe we wkładce jest

$$P = \int_0^r \frac{B_m^2 \cdot \pi \cdot r^3 \cdot \omega^2 \cdot S}{4\rho} \cdot 10^{-13} dr = \frac{B_m^2 \cdot \pi \cdot r^4 \cdot \omega^2 \cdot S}{16\rho} \cdot 10^{-13} \text{ (W)} \quad (16)$$

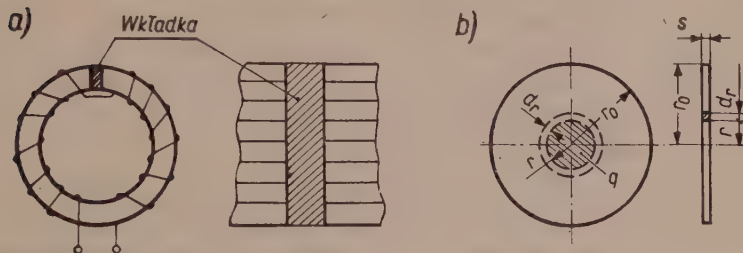
gdzie:

B_m — amplituda indukcji w szczelinie (Gs).

r — promień wkładki (cm),

s — grubość wkładki (mm),

ρ — oporność właściwa materiału wkładki ($\Omega \text{ mm}^2/\text{m}$)



Rys. 7. Głowica pierścieniowa o przekroju kołowym z wkładką z materiału przewodzącego w szczelinie.

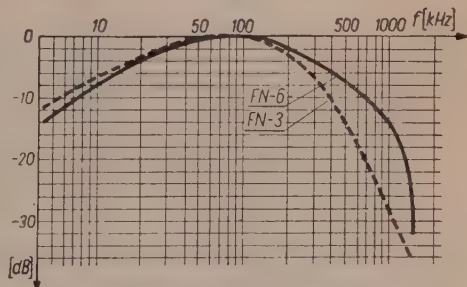
Obecność wkładki przewodzącej w szczelinie powoduje rosnący z częstotliwością wzrost oporności magnetycznej drogi strumienia magnetycznego w szczelinie

$$jX_m = j\omega \left(0,05 \cdot 10^{-5} \frac{s}{\rho} \right) \quad (17)$$

Mogłoby się więc wydawać, że stosowanie wkładek z materiału przewodzącego w głowicach wielkiej częstotliwości jest korzystniejsze niż stosowanie wkładek mikowych, gdyż zwiększenie oporności magnetycznej szczeliny wnoszonej przez nią kompensuje przynajmniej częściowo wzrost oporności magnetycznej rdzenia wskutek występowania w nim prądów wirowych.

Pomiary wykonane na identycznych głowicach różniących się jedynie obecnością wkładki mikowej (głowica FN-6) lub miedzianej (głowica FN-3) wykazały jednak (rys. 8) większą skuteczność w zakresie wielkich częstotliwości głowic z wkładką nieprzewodzącą.

Zjawisko to daje się wyjaśnić następująco: W zakresie wielkich częstotliwości, gdy długości zapisanych



Rys. 8. Napięcie wzbudzone w głowicach z wkładką miedzianą (FN-3) i z wkładką mikową (FN-6) przez taśmę wzorcową (TW-FN33) w dB.

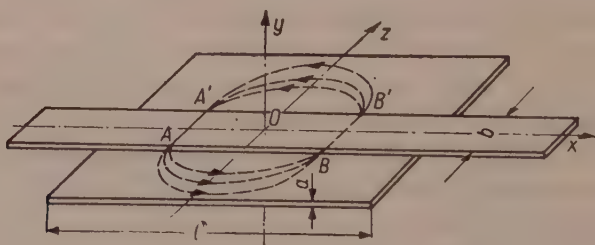
fal są porównywalne lub mniejsze od szerokości szczeliny, o wartości strumienia magnetycznego wnikaącego z taśmy w rdzeń głowicy decyduje rozkład linii magnetycznych w samej szczelinie. O wartości strumienia użytecznego decyduje więc oporność magnetyczna wnikania strumienia magnetycznego w szczelinę.

Przy przesuwaniu zapisanej taśmy, gdy szczelina głowicy jest wypełniona miedzianą wkładką wzbudzane w niej prądy wirowe powodują wzrost oporności magnetycznej wnikania strumienia w szczelinę, a zatem — w rdzeń. Im większa jest prędkość przesuwu taśmy tym większa jest oporność magnetyczna wnikania. W przypadku skrajnym gdy założymy, że szczelina jest wypełniona materiałem doskonale przewodzącym ($\rho=0$), żadna linia magnetyczna nie może wnikać w szczelinę. Wskutek tego w momencie przejścia przed szczeliną linie magnetyczne zamykają się w obszarze po drugiej stronie taśmy.

Zjawisko to nie występuje w przypadku szczeliny wypełnionej wkładką mikową lub wkładką z materiału nieprzewodzącego. Wynika więc stąd, że głowice z wkładką mikową lub z innego materiału nieprzewodzącego (np. szkło wodne) wykażą większą skuteczność w pasmie wielkich częstotliwości niż głowice z taką samą szczeliną lecz wypełnioną wkładką np. miedzianą.

5. OPORNOŚĆ MAGNETYCZNA WNIKANIA STRUMIENIA W METALOWĄ PŁYTKĘ

W celu obliczenia oporności magnetycznej wnikania strumienia w szczelinę wypełnioną materiałem przewodzącym, rozpatrzmy uproszczony układ złożony z płytki metalowej, wzdłuż powierzchni której prze-



Rys. 9. Rzut perspektywiczny na układ: taśma—płyta przewodząca.

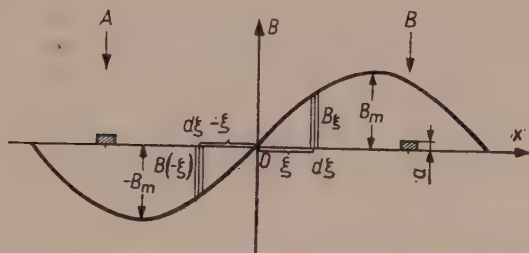
suwa się taśma (rys. 9) z sinusoidalnym zapisem magnetycznym. Taką płytkę przewodzącą tworzą w rzeczywistym układzie głowicy nakładki permalloyowe wraz z przewodzącą wkładką.

Założymy, że płytka ta ma grubość a , długość l i szerokość większą od szerokości ścieżki magnetycznej i wyznaczmy rozkład prądów induk-

wanych w płytce, gdy po niej przesuwa się z prędkością v taśma z zapisanym sinusoidalnym śladem magnetycznym o długości fali λ . Ze względu na symetrię całego układu względem osi z , prądy indukowane w płytce będą przebiegać symetrycznie w stosunku do początku układu 0 . Natężenie nitek prądowych AA' i BB' symetrycznie położonych względem osi z będą równe, a oporności elektryczne dróg AB i $A'B'$ poza taśmą można przyjąć za równe zero.

Rozkład indukcji powierzchniowej wzdłuż długości taśmy (rys. 10) jest

$$B_x = B_m \cdot \sin \frac{2\pi}{\lambda} x. \quad (18)$$



Rys. 10. Przekrój wzdłuż płaszczyzny $x-y$ z rys. 9.

Gdy taśma przesuwa się z prędkością stałą v to w każdym punkcie ξ wartość chwilowa strumienia przenikającego przez płytkę metalową jest

$$B_{(\xi)}(t) = B_m \sin \left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot vt + \frac{2\pi}{\lambda} \xi \right) \quad (19)$$

albo

$$B_{(\xi)}(t) = B_m \sin \frac{2\pi}{\lambda} (vt + \xi). \quad (20)$$

W punkcie symetrycznym $-\xi$ będzie

$$B_{(-\xi)}(t) = B_m \sin \frac{2\pi}{\lambda} (vt - \xi). \quad (21)$$

Obliczymy strumień $\Phi_x(t)$ przenikający przez płytkę w przestrzeni między A i B .

Strumień elementarny w odległości ξ od osi symetrii jest

$$d\Phi_{(\xi)}(t) = b \cdot d\xi \cdot B_m \cdot \sin \frac{2\pi}{\lambda} (vt + \xi) \quad (22)$$

a dla $(-\xi)$

$$d\Phi_{(-\xi)}(t) = b \cdot d\xi \cdot B_m \cdot \sin \frac{2\pi}{\lambda} (vt - \xi). \quad (23)$$

Strumień elementarny wypadkowy

$$d\Phi(t) = d\Phi_{(\xi)}(t) + d\Phi_{(-\xi)}(t) = b \cdot d\xi \cdot B_m \left[\sin \frac{2\pi}{\lambda} (vt + \xi) + \sin \frac{2\pi}{\lambda} (vt - \xi) \right], \quad (24)$$

$$d\Phi(t) = b \cdot B_m \cdot d\xi \cdot 2 \cdot \sin \frac{2\pi}{\lambda} vt \cdot \cos \frac{2\pi}{\lambda} \xi \quad (25)$$

$$d\Phi(t) = \left(2 \cdot b \cdot B_m \cdot \cos \frac{2\pi}{\lambda} \xi d\xi \right) \cdot \sin \frac{2\pi}{\lambda} \cdot vt. \quad (26)$$

Całkowity strumień między A i B (rys. 9)

$$\Phi(t) = \left[2 \cdot b \cdot B_m \int_0^x \cos \frac{2\pi}{\lambda} \xi \cdot d\xi \right] \sin \frac{2\pi}{\lambda} vt \quad (27)$$

stąd

$$\Phi(t) = \left[2 \cdot b \cdot B_m \cdot \frac{\lambda}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{\lambda} x \right] \sin \frac{2\pi}{\lambda} vt. \quad (28)$$

Siła elektromotoryczna indukowana w pętli AA'—B'B wynosi

$$e_{xx} = - \frac{d\Phi}{dt} \cdot 10^{-8} = - 2b \cdot B_m \cdot \frac{\lambda}{2\pi} \cdot \sin \frac{2\pi}{\lambda} x \cdot \cos \frac{2\pi}{\lambda} vt \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \cdot v \cdot 10^{-8}, \quad (29)$$

$$e_{xx} = - \left(2b \cdot B_m \cdot v \cdot \sin \frac{2\pi}{\lambda} x \cdot 10^{-8} \right) \cdot \cos \frac{2\pi}{\lambda} vt. \quad (30)$$

Siła elektromotoryczna indukowana w jednej nitce w odległości x od środka płytki

$$e_x = - \left(b \cdot v \cdot B_m \cdot \sin \frac{2\pi}{\lambda} x \cdot 10^{-8} \right) \cdot \cos \frac{2\pi}{\lambda} \cdot vt. \quad (31)$$

Moc tracona w płytce o długości l :

Moc w jednym przeciku $a \cdot b \cdot dx$ w odległości x jest:

$$dP_x = \frac{E_x^2}{2R} = \frac{b^2 \cdot v^2 \cdot B_m^2 \cdot \sin^2 \left(\frac{2\pi}{\lambda} x \right)}{2 \frac{b\varrho}{adx}} \cdot 10^{-16} \quad (32)$$

$$2dP_x = \frac{a \cdot b \cdot v^2 \cdot B_m^2 \cdot 10^{-16}}{\varrho} \sin^2 \left(\frac{2\pi}{\lambda} x \right) dx \quad (33)$$

$$P = \int_0^{\frac{l}{2}} 2dP_x = \frac{a \cdot b \cdot v^2 \cdot B_m^2 \cdot 10^{-16}}{\varrho} \int_0^{\frac{l}{2}} \sin^2 \left(\frac{2\pi}{\lambda} x \right) dx \quad (34)$$

$$P = \frac{a \cdot b \cdot v^2 \cdot B_m^2}{\varrho} \cdot \frac{\lambda}{2\pi} \cdot 10^{-16} \int_0^{x=\frac{l}{2}} \sin^2 q d\varphi. \quad (35)$$

Po scałkowaniu

$$P = \frac{l \cdot a \cdot b \cdot v^2 \cdot B_m^2}{4\varrho} \cdot 10^{-16} \left(1 - \frac{\sin \frac{2\pi l}{\lambda}}{\frac{2\pi l}{\lambda}} \right) \quad (36)$$

gdy $l \gg \lambda$

$$P = \frac{V \cdot v^2 \cdot B_m^2}{4\varrho} \cdot 10^{-16} \quad (\text{W}) \quad (37)$$

$V = l \cdot a \cdot b$ (objętość płytki metalowej pod taśmą).

W odległości x od osi symetrii mamy

$$B_x = B_m \cdot \sin \omega t \quad (38)$$

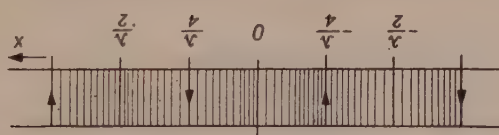
oraz

$$e_x = E_x \cdot \cos \omega t \quad (39)$$

przy czym

$$E_x = j b \cdot v \cdot B_m \cdot \sin \frac{2\pi}{\lambda} x \cdot 10^{-8} \quad (\text{V}) \quad (40)$$

Co $\lambda/2$ występują maksima napięć, a więc i gęstości prądów w blaszce.



Rys. 11. Rozkład natężenia prądów wzdłuż paska blachy.

Natężenie prądu płynącego w elemencie o szerokości dx , grubości a i długości b na odległości x od osi symetrii jest

$$dI_x = \frac{E_x}{b\varrho} = \frac{a \cdot E_x}{b \cdot \varrho} dx. \quad (41)$$

Gęstość prądu

$$i_x = \frac{dI_x}{dq} = \frac{dI_x}{a dx} = \frac{E_x}{b\varrho} = j \frac{v \cdot B_m}{\varrho} 10^{-8} \sin \frac{2\pi}{\lambda} x. \quad (42)$$

Rozkład gęstości prądu jest stacjonarny (przypomina falę stojącą). w środku płytki gęstość prądu jest zawsze równa zero (rys. 11). Odstęp

między dwoma maksimami (minimami) jest równy $\frac{\lambda}{2}$. Z (39) wynika, że między indukcją B_x i prądem i_x istnieje zawsze przesunięcie fazowe o 90° (w czasie).

Strumień magnetyczny przenikający płytkę na odcinku $\frac{\lambda}{2}$ jest równy

$$\Phi_m = \int_{-\frac{\lambda}{4}}^{\frac{\lambda}{4}} b \cdot H_m \cdot \cos \frac{2\pi}{\lambda} x dx = \frac{\lambda}{\pi} \cdot B_m \cdot b. \quad (43)$$

Sumaryczny prąd który otacza ten strumień

$$I_m = \int_0^{\frac{\lambda}{4}} dI_x = j \frac{a}{b \cdot \varrho} b v \cdot B_m \cdot \sin \frac{2\pi}{\lambda} x dx \cdot 10^{-8}, \quad (44)$$

$$I_m = j \int_0^{\frac{\lambda}{4}} \frac{a v B_m}{\varrho} \cdot 10^{-8} \cdot \sin \frac{2\pi}{\lambda} x dx = j \frac{\lambda}{2\pi} \cdot \frac{a v B_m}{\varrho} \cdot 10^{-8}, \quad (45)$$

$$I_m = j \frac{a \cdot v}{2\varrho \cdot b} \cdot \Phi_m \cdot 10^{-8}, \quad (46)$$

$$0,4\pi I_m = \Phi_m \cdot X_m. \quad (47)$$

Oporność magnetyczna wnikania strumienia w płytkę:

$$X_m = \frac{0,4\pi I_m}{\Phi_m} = \frac{0,4\pi}{\Phi_m} \cdot j \frac{a v}{2 \cdot \varrho \cdot b} \cdot \Phi_m \cdot 10^{-8} \quad (48)$$

i ostatecznie

$$X_m = j v \cdot \frac{2\pi a}{\varrho \cdot b} \cdot 10^{-9}. \quad (49)$$

Ponieważ

$$\frac{2\pi v}{\lambda} = \omega$$

można napisać

$$X_m = j \omega \cdot \frac{\lambda \cdot a}{\varrho \cdot b} \cdot 10^{-9}. \quad (50)$$

Z wzoru (49) wynika:

- 1) oporność magnetyczna płytki dla strumienia taśmy Φ_m jest proporcjonalna do prędkości przesuwu taśmy,
- 2) oporność magnetyczna wnikania strumienia magnetycznego jest proporcjonalna do grubości płytki a odwrotnie proporcjonalna do oporności właściwej materiału.

6. MODELE GŁOWIC ODCZYTUJĄCYCH WIELKIEJ CZĘSTOTLIWOŚCI

Opierając się na wnioskach z rozważań teoretycznych nad obwodem magnetycznym głowicy pracującej w pasmie wielkich częstotliwości wykonano szereg głowic odczytujących z rdzeniem metalicznym (rys. 12), ferrytowym (rys. 13) i ferrytowym z nakładkami z mumetalu (rys. 14). Głowice ferrytowe zostały wykonane z ferrytu manganowo-cynkowego (Ferroxyd 801) i niklowo-cynkowego (F-201) polskiej produkcji [6].

Przeprowadzone pomiary napięć indukowanych w tych głowicach przez taśmę o znanym przebiegu strumienia w funkcji długości fali pokazano na rys. 15. Dają one ocenę tych głowic pod względem skuteczności i charakterystyki częstotliwościowej skuteczności. Jak widać z rys. 15 głowice z rdzeniem metalicznym wykazują gwałtownie malejącą skuteczność w zakresie wielkich częstotliwości. To malenie skuteczności daje się wytłumaczyć tylko stratami częstotliwościowymi i wzrostem oporności magnetycznej rdzenia dla strumieni większych częstotliwości, gdyż szczeliny tych głowic są dostatecznie wąskie, jak to widać na fotografiach szczelin.

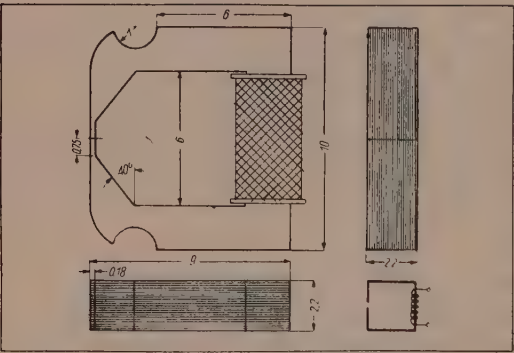
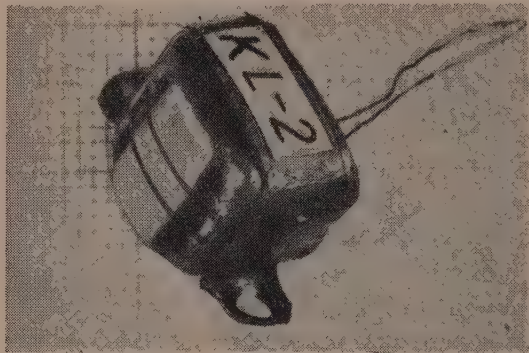
Podobny przebieg SEM wykazują głowice z rdzeniem ferrytowym bez nakładek (typ F). Spadek napięcia dużych częstotliwości w tych głowicach tłumaczy znaczna szerokość i kształt szczelin tych głowic oraz duża pojemność własna powodująca obniżenie częstotliwości rezonansowej głowicy.

Ze względu na to, że stosowanie ekranu magnetycznego powoduje zwiększenie własnych pojemności głowic, głowice małopojemnościowe są wykonywane bez ekranu na podstawie z plexiglasu. Pozwoliło to zmniejszyć pojemność własną do wartości ok. 6 pF.

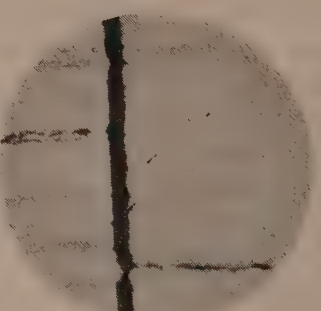
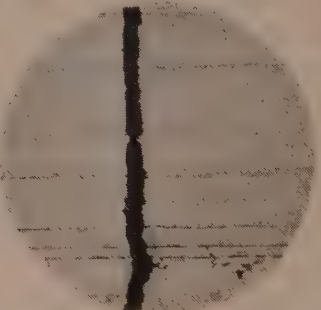
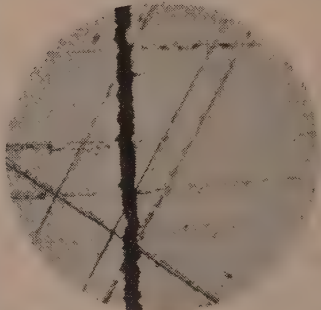
Największą skuteczność i najlepszą charakterystykę częstotliwościową wykazują głowice z rdzeniem ferrytowym z nakładkami (typ FN); przy tym, zgodnie z uprzednio omówionymi założeniami głowice z wkładką mikową (FN-6) wykazują znacznie większą skuteczność w zakresie większych częstotliwości (rys. 15), niż głowice takie same lecz z wkładką z folii miedzianej (FN-3).

Głowice typu FN-6 z wkładką mikową grubości ok. 3μ pozwalały odczytywać pasmo częstotliwości sygnałów do 1 MHz.

Rok wykonania	KL-2	Poz. katalogu
1958		7



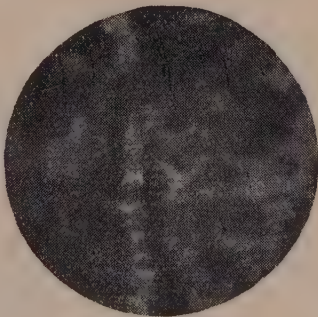
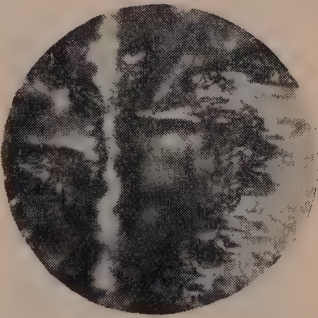
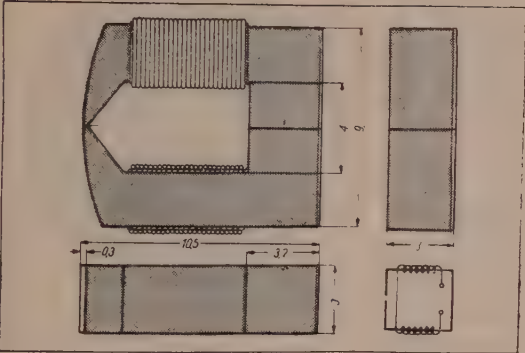
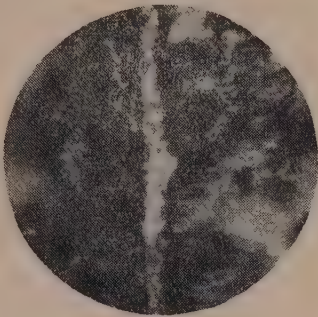
RDZEN						
Materiał	Grubość blach	Przekrój	Szczelina robocza		Szczelina tylna	Miko
	[mm]		szerokość	przekrój		
		[mm ²]	[μ]	[mm ²]	[μ]	
Mumetal	0,1	4,4	3	0,396	—	—
CEWKA						
Liczba zwojów	Średnica drutu	Sposób nawinięcia	Oporność	L przy f = 1000Hz	Q	K pojemność własna
				[Ω]	[μH]	
80	0,17	Widło-warstwowo	1	1350	5	6



Szczelina głowicy
Powiększenie x 1000

Rys. 12. Głowica z rdzeniem metalicznym.

Rok wykonania	F - 1	Roz. katalogu
1959		14



RDZEN						
Materiał	Grubość bloch	Przekrój	Szczelina robocza		Szczelina tylna	
	[mm]		szerokość	przekrój		
		[mm ²]	[μ]	[mm ²]	wkładka	[μ]
F-801	—	7,5	3	0,9	Cu	—
CEWKA						
Liczba zwojów	Średnica drutu	Sposób nawinięcia	Oporność	L	G	Pojemność własna
				przy f = 1000Hz		[pF]
	[mm]		[Ω]	[μH]		
2 × 40	0,11	Jedno-wrotowo	1	960	4,3	17

Szczelina głowicy
Powiększenie x 1000

Rys. 13. Głowica z rdzeniem ferrytowym.

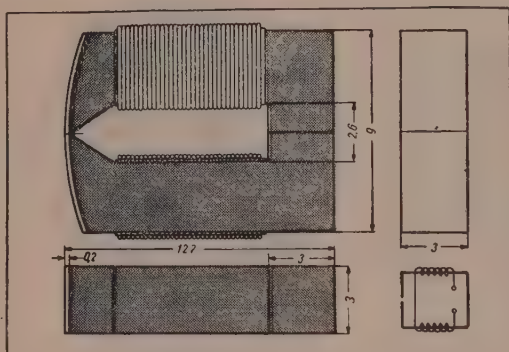
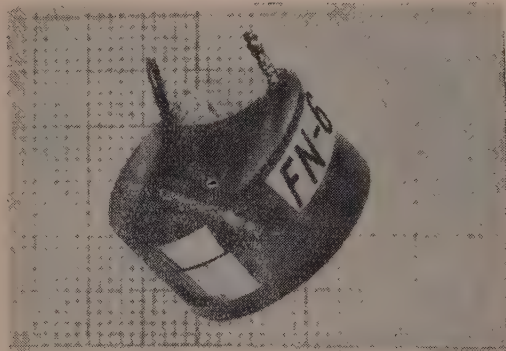
Rok wykonania

1959

FN-6

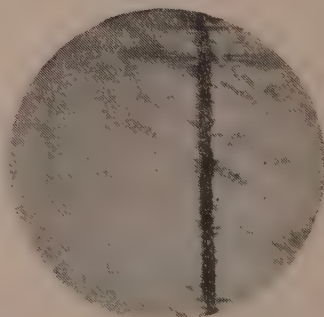
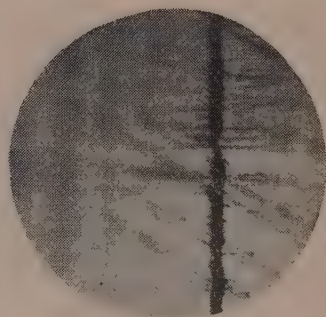
Poz. katalogu

27



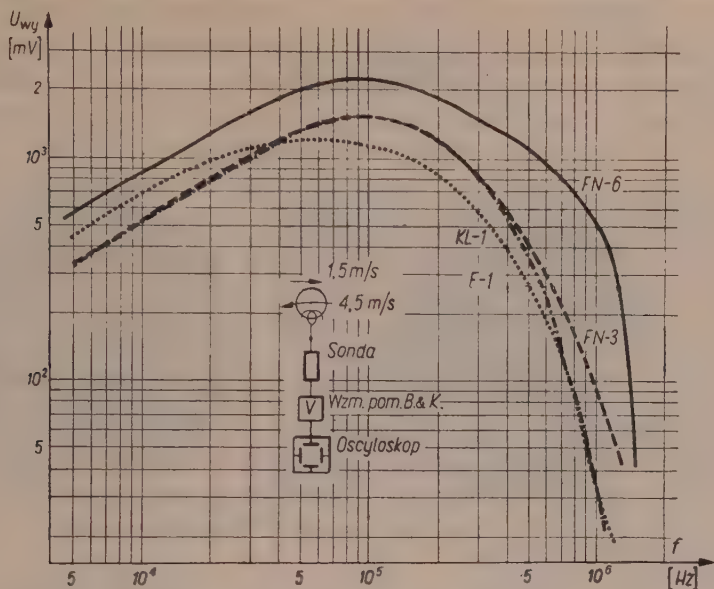
RDZEŃ			NAKLADKA		
Materiał	Przekrój	Szczelina tylna	Materiał	Przekrój	Szczelina robocza szerokość wkładka
	[mm ²]	[μ]		[mm ²]	[μ]
F-801	9,6	—	Mumetal	pocz. 0,6	3 Mika

CEWKA						
Liczba zwojów	Średnica drutu	Sposób nawinięcia	Oporność	L		Pojemność własna
				przy f = 1000 Hz		
	[mm]		[Ω]	[μH]		[pF]
2×40	0,11	Jednowarstwowa	1,7	360	1,1	6,5



Szczelina głowicy
Powiększenie x 1000

Rys. 14. Głowica z rdzeniem ferrytowym z nakładkami z mumetalu

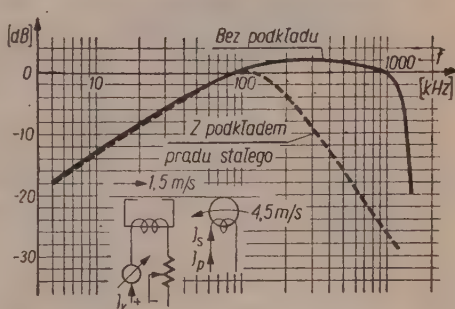


Rys. 15. Napięcie indukowane w głowicach z rdzeniem metalicznym (KL-2), z rdzeniem ferrytowym (F-1) i ferrytowym z nakładkami (FN-3 i FN-6) przez taśmę o znanym przebiegu strumienia w funkcji długości fali. (Taśma wzorcowa TW-FN33).

7. GŁÓWICA ZAPISUJĄCA

Modele głowic odczytujących służyły jako wyjściowe do opracowania głowic zapisujących. Przebadano głowice z rdzeniem metalicznym i ferrytowym pod względem strat, nagrzewania się, liniowości przyrostu pola przed szczeliną głowicy i pozostałości magnetycznej. Zbadano i określono zdolność rozdzielczą głowic, stwierdzając że najlepsze wyniki zapisu wielkich częstotliwości uzyskuje się głowicami ferrytowymi z nakładkami.

Dla uzyskania liniowej zależności między pozostałością magnetyczną na taśmie a natężeniem pola magnesującego zapisywanego sygnału konieczne jest stosowanie w procesie bezpośredniego zapisywania sygnałów podkładu prądu stałego lub prądu zmiennego. Posługując się oboma rodzajami podkładu stwierdzono, że zastosowanie prądu podkładu osłabia bardzo silnie zapis wielkich częstotliwości (rys. 16). Wynikła stąd potrzeba



Rys. 16. Charakterystyka zapisu i odczytu głowicą FN-6 bez i ze stałym pędem podkładu.

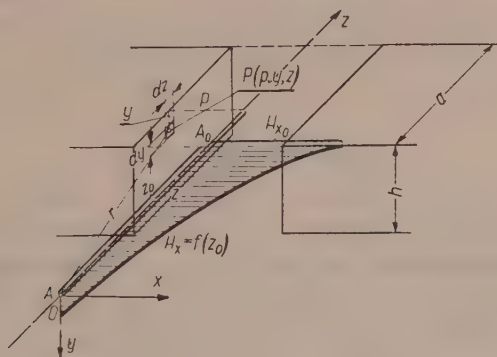


Rys. 17. Podwójna głowica.

opracowania podwójnej głowicy zapisującej (typ 2FN-6), która zapisuje sygnały małych częstotliwości z pokładem na jednej ścieżce i sygnały wielkiej częstotliwości bez podkładu na drugiej ścieżce. Do odczytywania służy taka sama głowica, w której składane są sygnały odczytywane z obu ścieżek.

Wykonana zgodnie z tymi założeniami podwójna głowica (rys. 17) spełnia wymagania stawiane bezpośredniemu zapisowi i odcytowi sygnałów w zakresie częstotliwości od 1 kHz do 1 MHz. Poza tym głowice te nadają się do zapisywania małych częstotliwości przez zapisywanie ich jako sygnału nośnego zmodulowanego częstotliwościowo.

W systemie wielościeżkowego zapisywania z jakim mamy do czynienia przy zapisywaniu sygnałów telewizyjnych, występuje zjawisko magnesowania polem głowicy zapisującej nie tylko właściwej ścieżki lecz również ścieżek sąsiednich, które mogą być już zapisane lub stanowią ścieżkę magnetyczną niezapisaną. W związku z tym w następujący sposób obliczono rozkład pola magnetycznego z boków szczeliny głowicy.



Rys. 18. Rozkład natężenia pola z boku szczeliny.

Dla głowicy przedstawionej na rys. 18 zakładając oporność magnetyczną rdzenia pomijalną wobec oporności szczeliny oraz równomierną gęstość linii na powierzchni całego przekroju rdzenia obliczymy indukcję w szczelinie

$$B_0 = \frac{\Phi}{q} = \frac{0,4\pi I w}{s} \quad (51)$$

gdzie:

s — szerokość szczeliny powietrznej,

q — powierzchnia przekroju rdzenia głowicy równa w przybliżeniu powierzchni przekroju szczeliny powietrznej,

w — liczba zwojów cewki głowicy.

Stąd powierzchniowa gęstość natężenia biegunów magnetycznych (przy założeniu że $\mu = \infty$)

$$J = \frac{B_0}{4\pi} = \frac{0,1Iw}{s} \quad (52)$$

Całkowita masa magnetyczna rozłożona na każdej z powierzchni rdzenia w ograniczającej szczelinie

$$\pm M = J \cdot q = \frac{0,1w}{s} q \quad (53)$$

Rozkład natężenia pola wytworzonego tą masą magnetyczną obliczymy tylko wzdłuż linii środkowej przechodzącej przez środek szczeliny (oś z). Elementarna masa magnetyczna w punkcie $P(y, z)$ równa

$$dM = J \cdot dq \quad (54)$$

wytworzy w punkcie $A(0, y, z)$ leżącym na linii środkowej w odległości r od masy dM elementarne natężenie pola

$$dH = \frac{dM}{r^2} = \frac{0,1Iw}{s} \cdot \frac{dq}{r^2} \quad (55)$$

ponieważ $dq = dy \cdot dz$ przeto

$$dH = \frac{0,1Iw \, dy \, dz}{s} \cdot \frac{1}{r^2} \quad (56)$$

Ponieważ rozpatrujemy tylko składową wzdłużnego namagnesowania interesuje nas tylko składowa wzdłużna pola magnesującego

$$dH_x = dH \cdot \cos \alpha = \frac{0,1Iw}{2} \cdot \frac{dy \cdot dz}{(\sqrt{r^2 \cos^2 \alpha + y^2 + z^2})^3} \quad (57)$$

Całkowite natężenie wzdłużne pola w punkcie A wytworzone przez wszystkie masy magnetyczne na obu powierzchniach czołowych rdzenia

$$H_x = 2 \int_{z_0}^{z_0+a} \int_0^h \frac{0,1Iw}{2} \cdot \frac{dy \, dz}{(\sqrt{p^2 + y^2 + z^2})^3} \quad (58)$$

gdzie

$$p = r \cos \alpha \quad (59)$$

po obliczeniach

$$H_x = \frac{0,1Iw}{p} \left\{ 2 \operatorname{arctg} \frac{h+z_0+a-\sqrt{p^2+h^2+(z_0+a)^2}}{p} - \operatorname{arctg} \frac{z_0+a}{p} \right\} + \\ - \frac{0,1Iw}{p} \left\{ 2 \operatorname{arctg} \frac{h+z_0-\sqrt{p^2+h^2+z_0^2}}{p} - \operatorname{arctg} \frac{z_0}{p} \right\} \quad (60)$$

Wprowadzając do wzoru (60) uproszczenia wynikające z tego że:

- a) wysokość rdzenia głowicy jest znacznie większa od szerokości szczeliny ($h \gg p$);
- b) szerokość głowicy, a więc i szerokość ścieżki magnetycznej jest znacznie większa od szerokości szczeliny ($a \gg p$) otrzymamy:

$$H_x = \frac{0,1Iw}{p} \left\{ \frac{\pi}{2} - 2 \arctg \frac{h+z_0 - \sqrt{h^2+z_0^2}}{p} + \arctg \frac{z_0}{p} \right\}. \quad (61)$$

Gdy założymy jeszcze, że $z_0 < h$, otrzymamy uproszczony wzór na rozkład natężenia pola wzdłuż osi z jako

$$H_x = \frac{0,1Iw}{p} \cdot \arctg \frac{p}{z_0}. \quad (62)$$

Na modelach głowicy wykonanych w skali 100:1 i 1000:1 przeprowadzono szczegółowe pomiary rozkładu pola przed szczeliną głowicy i z boków szczeliny. Pomiary te wykazały dużą zgodność wyników obliczeń z wynikami pomiarów.

Posługując się pomiarami na modelach określono również wpływ wkładki w szczelinie głowicy na rozkład pola przed szczeliną głowicy oraz czynną szerokość szczeliny.

8. ZAKOŃCZENIE

Opracowanie głowic zapisujących i odczytujących sygnały wielkiej częstotliwości w zakresie od 1 kHz do 1 MHz ze zniekształceniami nieliniowymi mniejszymi od 5% i przy poziomie zakłóceń ok. —30 dB pozwoliło na wykonanie szeregu doświadczalnych urządzeń do zapisywania i odczytywania sygnałów telewizyjnych na taśmach magnetycznych sposobem opatentowanym przez autora niniejszej pracy [7]. Sposób ten polega na zapisywaniu sygnałów wizyjnych wzdłuż długości taśmy głowicami wirującymi, przy czym zakłada się, że jedna głowica zapisuje ciągle na ścieżce wzdłuż długości taśmy jedno całkowite pole analizowanego obrazu telewizyjnego.

Działanie pierwszego doświadczalnego urządzenia było demonstrowane publicznie w maju 1959 r. przez Telewizję Warszawską.

Polskie Radio i Telewizja
Centralne Laboratorium

WYKAZ LITERATURY

1. Feldkeller R.: *Einfuehrung in die Theorie der Spulen und Uebertrager mit Eisenblechkernen*, Leipzig 1944.
2. Daniel E. D., Axon P. E.: *The reproduction of signals recorded on magnetic tape*, Proc. of the Institution of Electrical Engineers, vol. 100, part III, no. 65, 1953.

3. Daniel E. D.: *The influence of some head and tape constants on the signal recorded on a magnetic tape*, Proc. of the Institution of Electrical Engineers, May 1953.
4. Daniel E. D., Axon P. E., Frost W. T.: *A survey of factors limiting the performance of magnetic recording systems*, Proc. I. E. E. March 1957.
5. Chynneweth W. R.: *Ferrite heads for recording in the megacycle range*, Tele-Tech August 1955.
6. Smoliński A.: *Miękkie materiały magnetyczne oraz ich zastosowanie w przemyśle telekomunikacyjnym*, Przegl. Telekom., Warszawa, sierpień 1953.
7. Urbański B.: *Zapisywanie i odczytywanie sygnałów telewizyjnych na taśmach magnetycznych*, PWT Warszawa 1958.

МАГНИТНЫЙ КОНТУР ГОЛОВКИ ДЛЯ ВОСПРОИЗВЕДЕНИЯ И ЗАПИСИ СИГНАЛОВ ВЫСОКОЙ ЧАСТОТЫ

Исходным положением анализа головки для воспроизведения сигналов высокой частоты является дефиниция, что головка представляет собой преобразователь, который возбужденный магнитным полем записанным на ленте преобразовывает кинетическую энергию ее движения на электрическую энергию.

Для характеристики действия головки воспроизведения важен магнитный коэффициент полезного действия определяющий величину полезного магнитного потока проходящего из ленты в сердечник головки и возбуждающего в ее обмотках электромоторную силу.

Вычисление зависимости магнитного коэффициента полезного действия от частоты требует знакомства зависимости магнитного сопротивления сердечника и сопротивления рассеяния от частоты. Магнитное сопротивление сердечника является комплексным числом имеющим не только вещественную, но и мнимую часть, вызываемую потерями энергии в магнитном сердечнике. Эта мнимая часть зависит от частоты изменения магнитного потока. Увеличение магнитного сопротивления сердечника с ростом частоты вызвано потерями на гистерезис, вихревые токи и протеканием тока в обмотках головки. Последовательно вычислены:

1. Магнитное сопротивление сердечника вызванное потерями на гистерезис.
2. Магнитное сопротивление вызванное потерями на вихревые токи для сердечников из листовой стали и из феррита.
3. Влияние тока протекающего в обмотке головки на мнимое магнитное сопротивление сердечника.

Вычисление значений действительного и мнимого компонента магнитного сопротивления сердечника головки дает возможность вычислить полное магнитное сопротивление сердечника и комплексный магнитный коэффициент полезного действия головки воспроизведения.

По магнитному коэффициенту полезного действия лучшим материалом на сердечник головок для воспроизведения сигналов высокой частоты увляются ферриты. Однако для достижения соответственно узкого рабочего зазора ферритовых сердечников необходимо применять при из изготовлении фронтовые накладки из пластинок мюметалла, пермаллоя или альфенола. Исследовано влияние толщины накладок на индуктивность и эффективность головок и констатировано, что с уменьшением толщины накладки уменьшается индуктивность и возрастает эффективность особенно в диапазоне больших частот. Определена

оптимальная толщина накладки после решения компромисса между максимальной эффективностью и наиболее длительным сроком эксплуатации головки.

Вычислена мощность потерь на вихревые токи в медном вкладыше рабочего зазора головки и силу торможения ленты, вызванную потерями мощности в нем. Выведена формула на магнитное сопротивление вводимое присутствием вкладыша в зазоре.

Сравнительные измерения произведенные на одинаковых головках, отличающихся только слюдяным или медным вкладышем, показали большую эффективность в диапазоне высоких частот головок с диэлектрическим вкладышем. Для объяснения этого явления вычислено магнитное сопротивление для проникания потока в металлический слой образуемый накладками и проводящим вкладышем.

Констатируется, что при передвижении ленты с записью перед зазором головки с медным вкладышем в нем возбуждаются вихревые токи, вызывающие увеличение магнитного сопротивления для проникновения потока в зазор, а тем самым и в сердечник, так как при длинах записанных колебаний соизмеримых с шириной зазора распределение магнитных линий в зазоре определяет значение потока проникающего в сердечник.

Итогом и конечным результатом работы над воспроизводящими головками для визионных сигналов является создание головок способных воспроизводить с ленты сигналы в диапазоне частот от 1 Кгц до 1 Мгц. Приведены результаты испытаний ряда головок с сердечниками металлическими, ферритовыми и ферритовыми с накладками.

Модели воспроизводящих головок явились исходным материалом для разработки записывающих головок. Исследованы головки с металлическими и ферритовыми сердечниками по потерям, нагреву, линейности возрастания напряжения поля перед зазором и магнитного релаксанта. Исследована и определена разрешающая способность головок. Констатируется, что самые лучшие результаты записи высоких частот получаются при применении головок с сердечниками из феррита с накладками.

Для получения линейной зависимости магнитного релаксанта записи на ленте от напряжения магнитного поля записывающего сигнала необходимо в процессе непосредственной записи применение постоянного или переменного тока подмагничивания. Применяя оба рода тока констатируется, что ток подмагничивания очень заметно ослабляет запись высоких частот. Поэтому возникла необходимость разработки двойной записывающей головки, которая записывает сигналы низкой частоты с током подмагничивания на одной полосе, а сигналы высокой частоты без этого тока на другой полосе. Для воспроизведения сигналов применяется такая же самая головка, в которой суммируются сигналы с обеих полос.

Построенная согласно этим предпосылкам двойная головка удовлетворяет требованиям предъявляемым непосредственной записи и воспроизведению сигналов в диапазоне частот от 1 Кгц до 1 Мгц. Кроме того эти головки применимы для малых частот при записи их несущего сигнала с частотной модуляцией.

В системе многополосной записи, встречаемой при записывании телевизионных сигналов, наблюдается явление намагничивания полем головки не только основной полосы, но и смежных полос, предназначенных для записи других сигналов или оставляемых в ненамагниченном состоянии. В связи с этим вычислено распределение магнитного поля по бокам зазора головки.

На моделях головки построенных в увеличении 100 : 1 и 1000 : 1 произведены подробные исследования магнитного поля перед зазором головки и с его боков. Исследования произведенные на моделях показали, что результаты расчетов в значительной степени сходны с результатами измерений. Путем исследований моделей определено также влияние вкладыша в зазоре головки на распределение магнитного поля перед зазором головки и активную ширину зазора.

Разработка записывающих и воспроизводящих головок для сигналов высокой частоты в диапазоне от 1 Кгц и 1 Мгц с нелинейными искажениями не превышающими 5% при уровне помех около 30 дб позволило на постройку нескольких опытных установок для записи и воспроизведения телевизионных сигналов на магнитных лентах методом опатентованным автором этой статьи. Метод заключается в записи визионных сигналов вдоль ленты вращающимися головками, причем одна головка записывает непрерывно на продольной полосе одно комплетное поле анализированного телевизионного изображения.

Действие первой опытной установки этого типа было продемонстрировано публично в мае 1959 года Варшавским Телевидением.

MAGNETIC CIRCUIT OF PLAYBACK AND RECORD HEAD FOR HIGH-FREQUENCY SIGNALS

Analysis of the magnetic head intended to playback high frequency signals is based on assertion that it forms a transducer which, being induced by magnetic field recorded on the tape, converts the kinetic energy of the moving tape into electric energy. Essential for playback head performance is its magnetic efficiency which determines the magnitude of the useful magnetic flux passing from the tape to the head core and generating in its winding electromotive force.

In order to evaluate the magnetic efficiency as function of frequency, the dependence of the reluctance of the core and dissipation should be known with reference to frequency. The reluctance of the core is to be regarded as complex value, which besides of a real part has also an imaginary one, having its source in losses of energy in the magnetic core.

The imaginary part of reluctance depends on the magnetic flux frequency. The rise of the reluctance with increasing frequency is caused by hysteresis losses, eddy currents losses and flow of current in the head winding. Subsequently the following values are estimated:

1. reluctance of the core caused by hysteresis ,
2. reluctance caused by eddy currents losses in either laminated or ferrite core,
3. influence of current flowing through the head winding on the complex reluctance of the core.

The estimated values of real and imaginary components of the head core reluctance permit to find the total reluctance of the core and the complex magnetic efficiency of playback head .

As regards the magnetic efficiency, the most preferable material for the heads intended to playback high frequency signals are ferrites. Ferrite cores require, however, mumetal, permalloy or alfenol facing in order to obtain sufficiently narrow effective gaps in these heads. Investigations proved that inductance and efficiency of the head depend on the thickness of the facing. A decrease in the facing thickness reduces the head inductance improving at the same time its efficiency, particularly within the upper frequency range. The optimum facing

thickness is then determined as a result of mutual concession between the highest efficiency and the longest life-time of the head.

Power losses due to eddy currents in copper spacer inserted into the front gap of the head are then calculated as well as the resulting braking force exerted on the tape. A derived formula determines the reluctance associated with the presence of the spacer in the gap.

Measurements of heads identical with the exception of spacer — copper or mica — proved a higher efficiency within the high frequency range of heads incorporating non conducting spacers as compared with those housing copper. This phenomenon is being explained by the evaluation of the reluctance as presented to the flux penetrating into the metal plate being combined from the facing and the conducting spacer.

It has been proved that if a recorded tape moves across the gap of a head with copper spacer, eddy currents generated in the spacer raise the reluctance presented to the flux penetrating into the gap and into the core subsequently. It is the distribution of the magnetic lines in the gap itself which determines the value of the flux penetrating into the head core at recorded wavelengths comparable with the gaplength.

Closing the research on video playback heads in a final issue a number of heads able to playback from magnetic tape signals of frequencies ranging from 1 kc/s to 1 Mc/s have been manufactured. Experimental results obtained with a series of playback heads comprising a metal, ferrite or ferrite and facing cores are quoted.

Model playback heads next served as starting point for the development of record heads. Heads embodying both metal and ferrite cores have been examined with regard to loss, self-heating, linearity of field increment at the head gap and residual magnetism. The distributive capacity of the heads has been investigated and determined, the best results in the recording of high frequency signals being stated to ferrite heads with facing.

In order to obtain the residual magnetism on the tape a linear function of the magnetic field intensity of the recorded signal a d.c. biasing or an h.f. bias has shown necessary in the process of direct recording of the signal. Both kinds of bias being experimented it has been proved that any bias strongly deteriorates the recording of high frequency signals. Hence a double head has been devised to record the low frequency signals with bias on one track and the non-biased h.f. signals on another track. A similar bead reassembling the signals reproduced from both tracks is used for playback purposes.

The double head developed to meet this demand has satisfied all the requirements imposed by the direct recording and playback of signals ranging from 1 kc/s to Mc/s. Moreover, the head is suitable for the recording of low frequency signals entering as a frequency modulated carrier.

In a multitrack recording system, as it is the case in television signals recording, the phenomenon occurs by which the record head field would magnetize not only the desired track but also the adjacent tracks, which may either have been already recorded or represent an unrecorded magnetic track. Hence the magnetic field distribution outside the head gap has been calculated. Thereafter detailed measurements of the field distribution in front of as well as on the sides of the head gap have been performed on models made up to scales 100:1 and 1000:1. The practical results proved to be in good agreement with the calculation.

Measurements on model heads have also determined the influence of spacer

housed in the head gap on the distribution of the field in front of the gap as well as the effective gap length.

The development of heads devised for the recording and playback of h.f. signals ranging from 1 kc/s to 1 Mc/s, with harmonic distortion less than 5% and noise level of about -30 dB, has enabled the design of a number of experimental units for the recording and playback of television signals on magnetic tape following an original system (the author's patent). The idea is to record video signals on tape lengthwise by means of rotating heads, under an assumption that each head is continuously recording one complete field of the scanned television picture on a track lengthwise the tape. The first experimental equipment was demonstrated to the public by Warsaw Television in May, 1959.

621.3.045

W. LATEK

Naprężenia termiczne w uzwojeniach wirników turbogeneratorów

Rękopis dostarczono 16. 5. 1960

W artykule omówiono zjawisko powstawania naprężeń termicznych w uzwojeniach wirnika generatora przy rozruchu. Przeanalizowano te naprężenia w stanie termicznie ustalonym i nie ustalonym. Podano warunki, przy których mogą powstać trwałe skrócenia lub trwałe wydłużenia uzwojeń. Dla typowych układów wentylacyjnych podano metodę określania rozkładu temperatur uzwojeń wirnika. Podano sposób określania parametrów wstępnego podgrzewania, jako metody zapobiegającej trwałym odkształceniom.

1. ISTOTA ZJAWISKA POWSTAWANIA ODKSZTAŁCEŃ TRWAŁYCH W PRĘTACH UZWOJENIA WIRNIKA POD WPLYWEM NAPRĘŻEŃ TERMICZNYCH

Przy normalnym rozruchu turbogeneratorów podgrzewanie uzwojeń wirnika zachodzi przy znamionowej prędkości obrotowej wirnika. Temperatura prętów uzwojenia wirnika jest wyższa niż temperatura stali beczki wirnika zarówno przy pośrednim chłodzeniu prętów uzwojenia, gdy ciepło z prętów jest oddawane do czynnika chłodzącego za pośrednictwem zębów (czynnik chłodzący obmywa powierzchnię beczki wirnika lub dodatkowo kanały wentylacyjne w zębach), jak również przy bezpośrednim chłodzeniu prętów, gdy ciepło z prętów jest oddawane bezpośrednio do czynnika chłodzącego. Ponadto współczynnik cieplnej rozszerzalności miedzi prętów wirnika jest większy niż współczynnik cieplnej rozszerzalności stali beczki wirnika. Wskutek tego pręty uzwojenia mają tendencję do większego rozszerzania się niż beczka wirnika.

Przesuwaniu się prętów uzwojenia względem siebie i względem klina przeciwstawia się siła tarcia, powstająca w wyniku działania sił odśrodkowych. Wskutek tego powstają w prętach naprężenia zwane w dalszym ciągu naprężeniami termicznymi. Te naprężenia termiczne przekraczają granicę sprężystości miedzi [1], [4], [5], powodując powstawanie odkształceń trwałych.

Przy normalnym zatrzymywaniu turbogeneratora stygnięcie uzwojeń zachodzi w głównej mierze przy zmniejszonej prędkości obrotowej wirnika. Wtedy siły odśrodkowe działające na pręty uzwojenia są stosun-

kowo małe i siła tarcia przeciwstawiająca się przesuwaniu prętów wzdłuż osi wirnika jest mała, wobec czego pręty mogą się swobodnie przesuwać.

Wynikiem jednego cyklu cieplnego (normalny rozruch — praca — normalne zatrzymanie turbogenerатора) jest pewna wartość trwałego odkształcenia prętów uzwojenia wirnika.

Współczynnik tarcia pomiędzy poszczególnymi prętami uzwojenia wirnika oraz pomiędzy górnym prętem i klinem jest najczęściej tak duży [1], [4], [5], [8], że siły tarcia są większe od sił wywołanych naprężeniami termicznymi, wskutek czego poosiowy ruch pręta jest uniemożliwiony prawie na całej długości beczki wirnika. W tym przypadku przy normalnym rozruchu turbogenerатора powstaje trwałe zgrubienie pręta w żłobku, a przy zatrzymywaniu turbogenerатора następuje swobodne wciąganie części czołowych pręta do żłobka. Przy następnych cyklach termicznych zjawisko powtarza się, a odkształcenia ulegają sumowaniu. W rezultacie, po pewnej liczbie cykli, często już po kilkuset cyklach [1], powstają uszkodzenia wirnika, polegające na zniszczeniu izolacji wewnątrz żłobka z powodu zgrubienia prętów i na zniszczeniu systemu umocowań połączeń czołowych wskutek wciągania części tych połączeń do żłobków. Wywołuje to zwarcie doziemne lub międzyzwojowe uzwojeń wirnika.

Przy odpowiednio mniejszych wartościach współczynnika tarcia [2], [6] siły tarcia mogą się okazać mniejsze niż siły naprężeń termicznych. W tym przypadku przy podgrzewaniu prętów w czasie normalnego rozruchu pręty mogą się poosiowo przesuwać pod wpływem sił termicznych. Równocześnie jednak współczynnik tarcia jest tak duży, że poosiowe przesuwanie prętów następuje pod wpływem sił naprężeń termicznych przekraczających granicę sprężystości miedzi. Takie przesuwanie się prętów prowadzi do trwałych wydłużeń, co w konsekwencji powoduje wysuwanie się części żłobkowych pręta do części czołowych. Wreszcie także i w tym przypadku następuje niszczenie izolacji i systemu umocowań połączeń czołowych.

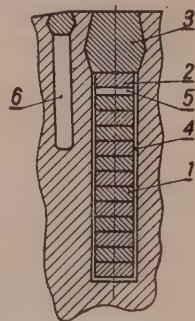
W miarę powtarzania się cykli termicznych właściwości miedzi ulegają zmianie, w wyniku czego sumaryczne odkształcenie po n cyklach nie jest n razy większe od odkształcenia po jednym cyklu. Wskutek rozszerzania i kurczenia się miedzi, czemu towarzyszą zjawiska podobne do zjawisk występujących przy obróbce mechanicznej, miedź ulega procesowi utwardzania, co podnosi jej granicę sprężystości. Gdyby równocześnie nie zachodziły inne zjawiska, powodujące przeciwne skutki do skutków utwardzania, to odkształcenie po każdym następnym cyklu termicznym byłoby odpowiednio mniejsze od odkształcenia po poprzednim cyklu, a odkształcenie całkowite po nieskończonej wielkiej liczbie cykli zbliżałoby się do pewnej skończonej wartości granicznej [4] dochodzącej do kilku dziesiątych części procenta.

Równocześnie jednak zachodzą zjawiska zmęczenia miedzi, relaksacji i pełzania, które w znacznym stopniu niweczą skutki utwardzania miedzi. Zmęczenie miedzi zachodzące pod wpływem stosunkowo wysokiej temperatury jest zjawiskiem wprost przeciwstawiającym się zjawisku utwardzania. W rezultacie miedź po dość długim nawet okresie czasu pracy turbogeneratora niewiele różni się co do twardości od miedzi świeżo użytej do nawijania wirnika. Zjawisko relaksacji polega na tym, że z biegiem czasu obniża się wartość naprężeń przy tym samym odkształceniu sumarycznym (trwałym i sprężystym), co odpowiada zwiększeniu odkształcenia trwałego przy danej różnicy temperatury [1]. Podobnie zjawisko pełzania powoduje zwiększenie odkształceń trwałych [1].

Wreszcie po dużej liczbie cykli termicznych odkształcenie trwałe nie zbliża się do pewnej wartości granicznej, lecz wzrasta po każdym cyklu osiągając wartości zbliżone do tych, jakie wystąpiłyby, gdyby własności miedzi nie uległy w międzyczasie zmianie.

2. PRZEBIEG SWOBODNEGO ROZSZERZANIA SIĘ PRĘTÓW WIRNIKA WZGLĘDEM KLINA W FUNKCJI CZASU

Przebieg swobodnego rozszerzania się zostanie rozpatrzony na przykładzie konkretnego, szczególnego rozwiązania konstrukcyjnego ustroju żłobka, jak podano na rys. 1, który przedstawia przekrój żłobka i przekrój kanału wentylacyjnego jednego z typów wirnika turbogeneratora zaopatrzonego w klatkę tłumiacą i kanały wentylacyjne w zębach. Bezpośrednio pod klinem żłobkowym znajduje się uzwojenie klatki tłumiaczej, oddzielonej od uzwojenia wzbudzenia stosunkowo grubą warstwą izolacji. Ciepło wydzielone w wirniku turbogeneratora jest odprowadzane do czynnika chłodzącego zarówno przez powierzchnię zewnętrzną beczki, jak i przez powierzchnię kanału wentylacyjnego. Ułożenie zastępczego schematu cieplnego dla tego układu i rozwiązanie odpowiednich równań byłoby rzeczą bardzo skomplikowaną. Dla uproszczenia zagadnienia można jednak z pewnym przybliżeniem przyjąć, że wskutek stosunkowo grubej warstwy izolacji między uzwojeniem wzbudzającym i uzwojeniem klatki nie ma wymiany ciepła między uzwojeniem wzbudzającym i klinem (łącznie z uzwojeniem klatki). Przy tym uproszczeniu można uważać, że ciepło z uzwojenia wzbudzającego jest odprowadzane przez izolację żłobkową i stal zęba do kanału wentylacyjnego i do zewnętrznej powierzchni beczki wirnika.



Rys. 1. Żłobek wirnika turbogeneratora z wentylacją wzmocnioną przy pomocy kanałów wentylacyjnych w zębach. 1, Pręty uzwojenia wirnika, 2, uzwojenie klatki tłumiaczej, 3, klin, 4, izolacja żłobkowa, 5, izolacja między uzwojeniem i klatką, 6, kanał wentylacyjny.

Wskutek wydzielania się ciepła w uzwojeniu wirnika przyrost temperatury pręta miedzi w odległości x od dna żłobka ponad temperaturę początkową (wspólną dla wszystkich prętów miedzi, klina i zęba) wyraża się zależnością

$$\theta_{\text{Cup}xt} = \theta_{\text{Cup}x} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{T_{\text{Cu}}}}\right) \quad (1)$$

gdzie $\theta_{\text{Cup}xt}$ — zmienna w czasie wartość przyrostu temperatury pręta na wysokości x od dna żłobka,

$\theta_{\text{Cup}x}$ — ustalona wartość tego przyrostu temperatury,

t — czas nagrzewania,

T_{Cu} — cieplna stała czasowa uzwojenia

Ponieważ poszczególne pręty uzwojenia wzbudzenia mogą się znajdować w różnych warunkach chłodzenia, przeto cieplne stałe czasowe poszczególnych prętów mogą być różne. Można jednak w przybliżeniu tych różnic nie uwzględniać i traktować T_{Cu} jako stałą czasową uzwojenia.

Równocześnie od strat tarcia o czynnik chłodzący i od strat dodatkowych nagrzewa się klin i górna warstwa zęba tworząca z klinem wspólny układ cieplny, gdyż oba te elementy nie są od siebie izolowane. Ponieważ wskutek sił tarcia klin nie może przesuwac się względem stali zębów, przeto w dalszym ciągu może być on traktowany jako część zęba, a wydłużenia prętów uzwojenia mogą być odnoszone do wydłużeń górnej warstwy zęba. Przyrost temperatury górnej warstwy zęba ponad temperaturę początkową wyraża się zależnością

$$\theta_{pt} = \theta_p \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{T_{\text{Fe}}}}\right), \quad (2)$$

gdzie θ_{pt} — zmienna w czasie wartość przyrostu górnej warstwy zęba ponad temperaturę początkową,

θ_p — ustalona wartość tego przyrostu temperatury

T_{Fe} — stała czasowa zespołu klin — górna warstwa zęba — klatka tłumiąca.

Długość górnej warstwy stali zęba zmienia się według zależności

$$l_{\text{Fet}} = l_{\text{Fe0}} \cdot (1 + a_{\text{Fe}} \cdot \theta_{pt}) \quad (3)$$

gdzie

l_{Fet} — zmienna w czasie długość górnej warstwy stali zęba,

l_{Fe0} — początkowa wartość tej długości,

$a_{\text{Fe}} = 11,5 \cdot 10^{-6}/^{\circ}\text{C}$ — cieplny współczynnik rozszerzalności stali
a długość żłobkowej części pręta uzwojenia przy założeniu możliwości swobodnego wydłużania się zmienia się według zależności

$$l_{\text{Cux}t} = l_{\text{Cux0}} \cdot (1 + a_{\text{Cu}} \cdot \theta_{\text{Cup}xt}) \quad (4)$$

gdzie

l_{Cuxt} — zmienna w czasie długość pręta znajdującego się na wysokości x od dna żłobka,

$l_{Cu x0}$ — początkowa wartość tej długości,

$\alpha_{Cu} = 17 \cdot 10^{-6}/^{\circ}\text{C}$ — cieplny współczynnik rozszerzalności miedzi

przy czym

$$l_{Cu x0} = l_{Fe0}.$$

Różnica długości pręta x miedzi i górnej warstwy zęba wynosi

$$\Delta l_{xt} = l_{Cu xt} - l_{Fe t} = l_{Cu x0} \cdot (\alpha_{Cu} \cdot \Theta_{Cupxt} - \alpha_{Fe} \cdot \Theta_{pt}) \quad (5)$$

a względne wydłużenie pręta x

$$\varepsilon_{xt} = \frac{\Delta l_{xt}}{l_{Cu x0}} = \alpha_{Cu} \cdot \Theta_{Cupxt} - \alpha_{Fe} \cdot \Theta_{pt}. \quad (6)$$

Po podstawieniu do wzoru (6) zależności (1) i (2) oraz zależności

$$k_a = \frac{\alpha_{Fe}}{\alpha_{Cu}}, \quad (7)$$

$$k_T = \frac{T_{Fe}}{T_{Cu}}, \quad (8)$$

$$k\Theta_x = \frac{\Theta_p}{\Theta_{Cupx}} \quad (9)$$

otrzymuje się

$$\varepsilon_{xt} = \alpha_{Cu} \cdot \Theta_{Cupx} \cdot \left[1 - k_a \cdot k_{\Theta x} + e^{-\frac{t}{T_{Cu}}} \cdot (k_a \cdot k_{\Theta x} \cdot e^{-\frac{t}{T_{Cu}} \cdot \frac{1-k_T}{k_T}} - 1) \right] \quad (10)$$

Względne wydłużenie pręta uzwojenia znajdującego się na wysokości x od dna żłobka, określone wzorem (10), składa się z sumy dwóch wydłużeń:

względnego wydłużenia ustalonego, jakie powstaje teoretycznie po czasie nieskończonego

$$\varepsilon_x = \alpha_{Cu} \cdot \Theta_{Cupx} \cdot (1 - k_a \cdot k_{\Theta x}) \quad (11)$$

oraz względnego wydłużenia przejściowego, istniejącego w stanie cieplnie nieustalonym, a znikającego w stanie ustalonym

$$\varepsilon_{xtt} = \alpha_{Cu} \cdot \Theta_{Cupx} \cdot e^{-\frac{t}{T_{Cu}}} \cdot (k_a \cdot k_{\Theta x} \cdot e^{-\frac{t}{T_{Cu}} \cdot \frac{1-k_T}{k_T}} - 1). \quad (12)$$

Stąd

$$\frac{d\varepsilon_{xt}}{dt} = \frac{d\varepsilon_{xtt}}{dt} = \alpha_{Cu} \cdot k_a \cdot \Theta_{Cupx} \cdot k_{\Theta x} \cdot \frac{1}{k_T \cdot T_{Cu}} \cdot e^{-\frac{t}{T_{Cu}}} \cdot \left[\frac{k_T}{k_a \cdot k_{\Theta x}} - e^{-\frac{t}{T_{Cu}} \cdot \frac{1-k_T}{k_T}} \right] \quad (13)$$

W rozpatrywanym układzie (rys. 1) jest $T_{Fe} > T_{Cu}$.
Można oznaczyć

$$A = a_{Cu} \cdot k_a \cdot \Theta_{Cupx} \cdot k_{\Theta x} \cdot \frac{1}{k_T \cdot T_{Cu}} \quad (14)$$

oraz

$$B = -\frac{1}{T_{Cu}} \cdot \frac{1 - k_T}{k_T} = \frac{k_T - 1}{k_T \cdot T_{Cu}} = \frac{T_{Fe} - T_{Cu}}{T_{Fe} \cdot T_{Cu}} \quad (15)$$

przy czym, wobec $T_{Fe} > T_{Cu}$ jest $B > 0$.

Wtedy można napisać

$$\frac{d\varepsilon_{xt}}{dt} = A \cdot e^{-\frac{t}{T_{Cu}}} \cdot \left[\frac{k_T}{k_a \cdot k_{\Theta x}} - e^{B \cdot t} \right] \quad (16)$$

Wydłużenia względne osiąga maksimum przy

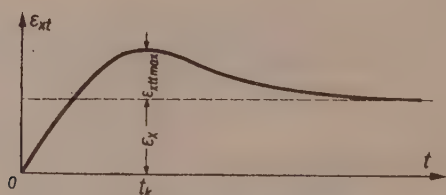
$$\frac{d\varepsilon_{xt}}{dt} = 0$$

czyli w czasie

$$t_k = \frac{1}{B} \cdot \ln \frac{k_T}{k_a \cdot k_{\Theta x}} = \frac{k_T}{k_T - 1} \cdot \ln \frac{k_T}{k_a \cdot k_{\Theta x}} \cdot T_{Cu} \quad (17)$$

Maksymalna wartość wydłużenia względnego wynosi wtedy

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xt\max} &= a_{Cu} \cdot \Theta_{Cupx} \cdot (1 - k_a \cdot k_{\Theta x}) + a_{Cu} \cdot \Theta_{Cupx} \cdot e^{-\frac{k_T}{k_T - 1} \cdot \ln \frac{k_T}{k_a \cdot k_{\Theta x}}} \cdot (k_T - 1) = \\ &= \varepsilon_x + \varepsilon_{xtt\max}, \end{aligned} \quad (18)$$



Rys. 2. Zależność wydłużenia względnego od czasu.

gdzie ε_x — wydłużenie względne w stanie ustalonym określone wzorem (11),

$$a \quad \varepsilon_{xtt\max} = a_{Cu} \cdot \Theta_{Cupx} \cdot e^{-\frac{k_T}{k_T - 1} \cdot \ln \frac{k_T}{k_a \cdot k_{\Theta x}}} \cdot (k_T - 1) \quad (19)$$

oznacza maksymalną wartość składowej zmiennej wydłużenia względnego.

Przebieg funkcji $\varepsilon_{xt} = f(t)$ pokazano na rys. 2.

3. NAPRĘŻENIA I ODKSZTAŁCENIA W PRĘTACH WIRNIKA

Można wykazać [5], [8], że przy ruchu wirnika powstaje tak duża siła odśrodkowa działająca na każdy z prętów uzwojenia, że siła tarcia powstająca przy tendencji prętów do ruchu w przypadku dostatecznie dużego współczynnika tarcia nie dopuszcza do przesuwania się prętów prawie na całej ich długości. Przy braku przesunięcia pręta naprężenia termiczne w zakresie odkształceń sprężystych można wyrazić przez

$$\sigma_{xt} = \varepsilon_{xt} \cdot E \quad (20)$$

gdzie: σ_{xt} — zmienne w czasie naprężenie termiczne pręta na wysokości x od dna żłobka,

$E = 10^{10} \text{ kg/cm}^2$ — moduł sprężystości miedzi

Po wykorzystaniu zależności (10) otrzymuje się wyrażenie na zmienne w czasie naprężenia

$$\sigma_{xt} = E \cdot \alpha_{Cu} \cdot \Theta_{Cupx} \cdot [1 - k_a \cdot k_{\theta x} + e^{-\frac{t}{T_{Cu}}} \cdot (k_a \cdot k_{\theta x} \cdot e^{-\frac{t}{T_{Cu}} \cdot \frac{1-k_T}{k_T}} - 1)] \quad (21)$$

Po czasie t_k określonym wzorem (17) wydłużenie osiągnęłoby wartość maksymalną $\varepsilon_{xt \max} = \varepsilon_x + \varepsilon_{xtt \max}$ (rys. 2) określoną wzorem (18), a przy braku wydłużeń po czasie t_k naprężenia osiągną wartość maksymalną określoną zależnością

$$\sigma_{xt \max} = E \cdot \varepsilon_{xt \max} \quad (22)$$

Gdyby naprężenia nie przekraczały granicy sprężystości wynoszącej dla miedzi $\sigma_k \approx 500 \text{ kg/cm}^2$, to po ich zniknięciu nie pozostałyby w miedzi żadne odkształcenia trwałe. Najczęściej jednak naprężenia termiczne znacznie przekraczają granicę sprężystości. Wtedy wartość odkształceń trwałych, powstających w pręcie po jednym cyklu termicznym można określić graficznie [4] na podstawie danego przebiegu zależności naprężeń od odkształceń, czyli na podstawie przebiegu krzywej $\sigma = f(\varepsilon)$

Jeżeli współczynnik tarcia jest tak duży, że pręt nie może się przesuwać, nawet przy maksymalnych naprężeniach, to po przejściu przez maksymalne naprężenie w czasie t_k , przy których pręt najbardziej się rozszerzył, naprężenia w pręcie zmniejszają się, pręt kurczy się i w stanie ustalonym uzyskuje naprężenie odpowiadające względnemu wydłużeniu w stanie ustalonym, co można wyrazić przez

$$\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x = E \cdot \alpha_{Cu} \cdot \Theta_{Cupx} \cdot (1 - k_a \cdot k_{\theta x}) \quad (23)$$

Jeżeli natomiast współczynnik tarcia ma taką wartość, że naprężenia termiczne $\sigma_{xt \max}$ powodują powstanie siły większej niż siła tarcia, to pręt wydłuży się o wartość $\varepsilon_{xt \max}$, określoną wzorem (18). Ponieważ to

wydłużenie ma miejsce przy przekroczeniu granicy sprężystości, to powstają odkształcenia trwałe (wydłużenie pręta) odpowiadające maksymalnym naprężeniom $\sigma_{xt \max}$ określonym wzorem (22). W tym przypadku po każdym cyklu termicznym powstaje pewna wartość odkształcenia trwałego, polegającego na wydłużeniu się pręta i na wysuwaniu się jego części żłobkowej w stronę połączeń czołowych. Zjawisko to czasem jest obserwowane w praktyce. Jest sprawą bardzo trudną ustalenie zarówno czasu t_k , w którym występuje maksymalne naprężenie, jak i wartości tego naprężenia, gdyż do tego potrzebne byłyby wartości liczbowe wielkości T_{Fe} i T_{Cu} . Zwłaszcza trudno jest w praktyce określić stałą T_{Fe} . Należy przy tym pamiętać, że przebieg $\varepsilon_{xt} = f(t)$ przedstawiony na rys. 2 może znacznie różnić się od przebiegu rzeczywistego, gdyż do otrzymania krzywej $\varepsilon_{xt} = f(t)$ zostało przyjęte uproszczenie, że nie ma wymiany ciepła pomiędzy uzwojeniem wzbudzającym, a zespołem klin — górna warstwa zęba — uzwojenie klatki. Ponadto na wartość ostatecznego wydłużenia ma wpływ wartość współczynnika tarcia, μ gdyż dla różnych μ siły termiczne mogą przewyższyć siłę tarcia przy różnych wartościach naprężeń. Wartość współczynnika tarcia można przyjmować w granicach $\mu = 0,2 \div 0,5$, [5], [8]. Oczywiście wartość tego współczynnika zależy od rodzaju izolacji. Przy dużych wartościach współczynnika tarcia, a więc przy założeniu, że w czasie całego cyklu termicznego pręt nie może się przesunąć, dla określenia ostatecznych odkształceń (skurczenie się pręta) miarodajne są naprężenia termiczne w stanie ustalonym, określone wzorem (23).

Po podstawieniu wartości liczbowych

$$\alpha_{Cu} = 17 \cdot 10^{-6} / ^\circ C, E = 10^{-6} \text{ kG/cm}^2$$

i

$$k_a = \frac{\alpha_{Fe}}{\alpha_{Cu}} = \frac{11,5 \cdot 10^{-6}}{17 \cdot 10^{-6}} = 0,68$$

otrzymuje się dla zestawu metali miedź-stal wyrażenie

$$\sigma_x = 17 \cdot (1 - 0,68 \cdot k_{\theta x}) \cdot \theta_{Cupx}. \quad (24)$$

Naprężenia określone wzorem (23) i (24) mogą dochodzić do wartości 1500 kG/cm², a więc znacznie przekraczają granicę sprężystości miedzi.

Dla zmniejszenia odkształceń trwałych można stosować różne środki zaradcze [4], [5], [7]. Można na przykład użyć miedzi utwardzonej z dodatkiem srebra, co znacznie podnosi jej granicę sprężystości. Można uzwojenia wzbudzenia wykonać z aluminium, a zwłaszcza z odpowiedniego stopu np. Cond-Al [3]. Ciepły współczynnik rozszerzalności Cond-Alu wynosi $\alpha_{Al} = 13,1 \cdot 10^{-6}$, a więc nie wiele więcej niż stali. W związku z tym naprężenia powstające w uzwojeniu są zwykle mniejsze od granicy sprężystości wynoszącej około 1100 kG/cm².

Jednym ze środków zaradczych jest także stosowanie podgrzewania wstępnego, polegającego na podgrzewaniu prętów uzwojenia do pewnej temperatury, określonej przyrostem temperatury $\theta_{\text{Cup}xwt}$ pręta x ponad temperaturę początkową przy nieobecności sił odśrodkowych (przy małej prędkości obrotowej wirnika). Wtedy pojawia się rzeczywiste wydłużenie pręta

$$\varepsilon_{xwt} = a_{\text{Cu}} \cdot \theta_{\text{Cup}xwt} \cdot (1 - k_a \cdot k_{\theta xwt}), \quad (25)$$

gdzie

$$k_{\theta xwt} = \frac{\theta_{pwt} - \theta_{\text{Cup}xwt}}{\theta_{\text{Cup}xwt}} \quad (26)$$

θ_{pwt} — przyrost górnej warstwy zęba (klina) ponad temperaturę początkową.

Przy podgrzewaniu wstępnym nie uzyskuje się stanu termicznie ustalonego, a więc wielkości $\theta_{\text{Cup}xwt}$ i θ_{pwt} są funkcjami czasu, co zaznaczono symbolem t w indeksie.

W danej chwili t , przy danym θ_{pwt} , $\theta_{\text{Cup}xwt}$ i ε_{xwt} podgrzewanie wstępne zostaje przerwane, prędkość obrotowa maszyny zostaje szybko zwiększona do prędkości znamionowej, przez co pojawiają się siły odśrodkowe przy istniejącym już wydłużeniu ε_{xwt} . Wskutek tego, po podgrzaniu uzwojenia do danej temperatury, w czasie pracy maszyny pojawiają się naprężenia odpowiadające odkształceniu wypadkowemu

$$\varepsilon_{xr} = \varepsilon_x - \varepsilon_{xwt}. \quad (27)$$

Te naprężenia wynoszą

$$\sigma_{xr} = E \cdot \varepsilon_{xr} = E \cdot a_{\text{Cu}} \cdot [\theta_{\text{Cup}x} \cdot (1 - k_a \cdot k_{\theta x}) - \theta_{\text{Cup}xwt} \cdot (1 - k_a \cdot k_{\theta xwt})], \quad (28)$$

albo, dla zestawu metali „miedź-stal”,

$$\sigma_{xr} = 17 \cdot [\theta_{\text{Cup}x} \cdot (1 - 0,68 \cdot k_{\theta x}) - \theta_{\text{Cup}xwt} \cdot (1 - 0,68 \cdot k_{\theta xwt})] \quad (29)$$

4. MINIMALNY PRZYROST TEMPERATURY PRZY PODGRZEWANIU WSTĘPNYM

Optymalnym przypadkiem byłoby podgrzanie wstępne miedzi do takiej temperatury, aby naprężenia termiczne w przecie przy pracy generatora były równe zeru; odpowiada to warunkowi

$$\sigma_{xr} = 0 \quad (30)$$

a po podstawieniu (28) do (30) i rozwiązaniu względem $\theta_{\text{Cup}xwt}$ określa konieczny przyrost temperatury pręta uzwojenia wirnika przy podgrzewaniu wstępnym

$$\theta_{\text{Cup}xwt} = \frac{\theta_{\text{Cup}x} \cdot (1 - k_a \cdot k_{\theta xwt})}{1 - k_a \cdot k_{\theta xwt}}. \quad (31)$$

Zarówno $\theta_{\text{Cup}xwt}$ jak i $\theta_{\text{Cup}x}$ są funkcjami odległości pręta od dna żłobka. Aby równość (31) była spełniona dla dowolnej wysokości x , rozkład przyrostu temperatury wzdłuż wysokości zęba w czasie podgrzewania wstępnego powinien być analogiczny do rozkładu przyrostu temperatury $\theta_{\text{Cup}x}$ wzdłuż wysokości zęba w czasie pracy maszyny. Ze względu na różne kierunki przepływu strumienia cieplnego w zębie przy podgrzewaniu wstępnym i przy normalnej pracy warunek ten jest niemożliwy do spełnienia. Dlatego stawia się warunek, wystarczający zresztą do celów praktycznych, aby przy zastosowaniu podgrzewania wstępnego naprężenia wypadkowe w prętach uzwojenia nie przekroczyły pewnej dopuszczalnej wartości granicznej σ_g , niewiele przewyższającej granicę sprężystości miedzi. Wtedy otrzymuje się warunek

$$\sigma_{xr} \leq \sigma_g \quad (32)$$

Przy wykorzystaniu wzoru (28) uzyskuje się wyrażenie

$$\theta_{\text{Cup}xwt \min} = \frac{\theta_{\text{Cup}x} \cdot (1k_a \cdot k_{\theta x}) - \frac{\sigma_g}{E \cdot a_{\text{Cu}}}}{1 - k_a \cdot k_{\theta xwt}} \quad (33)$$

oznaczające minimalną wartość przyrostu temperatury pręta na wysokości x od dna żłobka, jaki trzeba uzyskać przy podgrzewaniu wstępnym, aby naprężenia występujące w tym pręcie w czasie pracy nie przekroczyły pewnej bezpiecznej wartości σ_g .

Przy zbyt dużej wartości $\theta_{\text{Cup}xwt}$ mogą pojawiać się naprężenia w kierunku przeciwnym. W praktyce jednak naprężenia w kierunku przeciwnym nie przybierają niebezpiecznych wartości i na ogół nie zachodzi potrzeba określania dopuszczalnej maksymalnej temperatury przy podgrzewaniu wstępnym.

5. ROZKŁAD TEMPERATUR WZDŁUŻ WYSOKOŚCI ZĘBA

Dla określenia odpowiednich naprężeń konieczna jest znajomość wielkości $\theta_{\text{Cup}x}$ to jest przyrostu temperatury pręta na wysokości x ponad temperaturę początkową klina w czasie pracy wirnika oraz znajomość wielkości $\theta_{\text{Cup}xwt}$ to jest przyrostu temperatury w danej chwili podgrzewania wstępnego pręta na wysokości x ponad temperaturę początkową klina.

W wirnikach, w których chłodzenie odbywa się tylko przez zewnętrzną powierzchnię beczki wirnika, strumień cieplny w stanie ustalonym ma przebieg pokazany na rys. 3. Dla tego przypadku spadek temperatury na odcinku zęba dx przy założeniu odpowiednich uproszczeń wg [5] odległym o x od dna żłobka wynosi

$$d\theta_{zx} = k_{Fe} \cdot p_z \cdot \frac{x \cdot dx}{h \cdot \left(b_1 + x \cdot \frac{b_2 - b_1}{h} \right)} \quad (34)$$

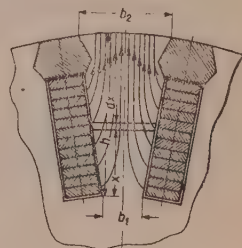
gdzie $k_{Fe} = 2,2 \frac{\text{cm}^2 \cdot ^\circ\text{C}}{\text{W} \cdot \text{cm}}$ — cieplna oporność właściwa stali,

p_z — ilość ciepła odprowadzona z jednego żłobka na długości 1 cm, czyli ilość strat w miedzi jednego żłobka wirnika na 1 cm długości żłobka w W/cm,

(reszta oznaczeń wynika z rys. 3).

Na tej podstawie spadek temperatury na części zęba od wierzchołka do wysokości x (od dna żłobka) wynosi

$$\theta_{z2x} = k_{Fe} \cdot p_z \cdot \frac{h}{b_2 - b_1} \cdot \left[\frac{h - x}{h} \frac{b_1}{b_2 - b_1} \cdot \ln \frac{b_2}{b_1} + \frac{x}{1 + \frac{x}{h} \cdot \frac{b_2 - b_1}{b_1}} \right], \quad (35)$$



Rys. 3. Rozkład strumienia ciepłego w zębie w stanie ustalonym.

a spadek temperatury na całym zębie ($x=0$) jest

$$\theta_z = k_{Fe} \cdot p_z \cdot \frac{h}{b_2 - b_1} \cdot \left(1 - \frac{b_1}{b_2 - b_1} \cdot \ln \frac{b_2}{b_1} \right). \quad (36)$$

Strumień cieplny, przenikający przez 1 cm² powierzchni izolacji żłobkowej

$$p_i = \frac{p_z}{O_i} \quad (37)$$

gdzie O_i — obwód izolacji żłobkowej w cm.

Spadek temperatury na izolacji w stanie ustalonym

$$\theta_i + k_i \cdot p_i \cdot \Delta_i \quad (38)$$

gdzie $k_i = 835 \frac{\text{cm}^2 \cdot ^\circ\text{C}}{\text{W} \cdot \text{cm}}$ — cieplna oporność właściwa izolacji

Δ_i — grubość izolacji żłobkowej w cm.

Różnica między temperaturą klina (górnej warstwy zęba) i temperaturą warstwy miedzi na wysokości x od dna żłobka

$$\theta_{kx} = \theta_i + \theta_{z2x}. \quad (39)$$

Różnica pomiędzy temperaturą klina i temperaturą najgorętszej warstwy miedzi na dnie żłobka

$$\vartheta_2 = \vartheta_p + \Theta_p. \quad (48)$$

Przyjmując pewną najwyższą dopuszczalną temperaturę ϑ_{Cu1} , można wykreślić rozkład temperatury miedzi i zęba (rys. 4).

Czas podgrzewania wstępnego jest na ogół niewielki (ułamek stałej czasowej uzwojenia wirnika); można więc założyć, że podgrzewanie wstępne ma przebieg adiabatyczny. Przy tym założeniu nie następuje podgrzewanie stali zębów wirnika, a przyrost temperatury miedzi uzwojenia ponad temperaturę górnej warstwy zęba jest niezależny od odległości rozpatrywanej warstwy miedzi od dna żłobka i równy jest spadkowi temperatury w izolacji. Można więc napisać

$$\Theta_{Cupxwt} = \Theta_{Cuwt} = \Theta_{iwt} \quad (49)$$

gdzie Θ_{Cuwt} — zależny od czasu, a niezależny od odległości x przyrost temperatury miedzi ponad temperaturę początkową przy podgrzewaniu wstępnym,

Θ_{iwt} — zależny od czasu spadek temperatury w izolacji przy podgrzewaniu wstępnym.

Przyrost temperatury warstwy x zęba ponad temperaturę początkową przy podgrzewaniu wstępnym jest równy zeru

$$\Theta_{pxwt} = \Theta_{pwt} + \Theta_{z2xwt} = 0 + 0 = 0. \quad (50)$$

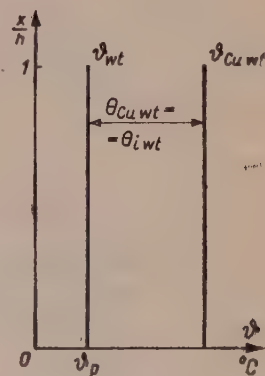
Temperatura zęba na całej wysokości jest przy podgrzewaniu wstępnym równa temperaturze początkowej

$$\vartheta_{xwt} = \vartheta_{wt} = \vartheta_p \quad (51)$$

a temperatura miedzi na całej wysokości wynosi

$$\vartheta_{Cuxwt} = \vartheta_{Cuwt} = \vartheta_p + \Theta_{iwt} = \vartheta_p + \Theta_{Cuwt}. \quad (52)$$

Rozkład temperatury miedzi i stali zęba wzdłuż wysokości zęba pokazano na rys. 5.



Rys. 5. Rozkład temperatur miedzi i stali wzdłuż wysokości zęba przy podgrzewaniu wstępnym.

6. CZAS PODGRZEWANIA WSTĘPNEGO

Ciężar miedzi żłobkowej na 1 cm długości przy wysokości żłobka h_z , szerokości b_z , współczynnika wypełnienia ξ i ciężarze właściwym miedzi g G/cm³ jest

$$h_z \cdot b_z \cdot \xi \cdot g \text{ G/cm.}$$

Straty wydzielające się na 1 cm długości żłobka wynoszą p_z . Dla przemiany adiabatycznej można więc napisać

$$h_z \cdot b_z \cdot \xi \cdot g \cdot c \cdot Q_{Cuwt} = p_z \cdot t_w \quad (53)$$

gdzie t_w — czas podgrzewania wstępnego w sekundach,

$$c = 3,38 \frac{\text{W} \cdot \text{sek}}{\text{G} \cdot ^\circ\text{C}} \text{ — ciepło właściwe miedzi.}$$

Czas podgrzewania wstępnego potrzebny dla uzyskania przyrostu

$$\Theta_{\text{Cu}wt} \text{ będzie } t_w = \frac{h_z \cdot b_z \cdot \xi \cdot g \cdot c}{p_z} \cdot \Theta_{\text{Cu}wt}. \quad (54)$$

Przy uwzględnieniu żądanej wartości $\Theta_{\text{Cu}wt} = \Theta_{\text{Cu}pxwt}$ określonej wzorem [33] otrzymuje się wyrażenie na minimalny czas podgrzewania wstępnego w sekundach jako

$$t_w = \frac{h_z \cdot b_z \cdot \xi \cdot g \cdot c}{p_z} \cdot \frac{\Theta_{\text{Cu}px} \cdot (1 - k_a \cdot k_{\theta x}) - \frac{\sigma_g}{E \cdot a_{\text{Cu}}}}{1 - k_a \cdot k_{\theta wt}}. \quad (55)$$

Przyrost temperatury miedzi ponad temperaturę początkową osiąga wartość największą $\Theta_{\text{Cu}p}$ na dnie żłobka. Aby w tym miejscu naprężenia nie przekroczyły dopuszczalnej wartości musi być przy podgrzewaniu wstępnym osiągnięty przyrost temperatury ponad temperaturę początkową

$$\Theta_{\text{Cu}pw} = \frac{\Theta_{\text{Cu}p} \cdot (1 - k_a \cdot k_{\theta}) - \frac{\sigma_g}{E \cdot a_{\text{Cu}}}}{1 - k_a \cdot k_{\theta w}} \quad (56)$$

gdzie $k_{\theta} = \frac{\Theta_p}{\Theta_{\text{Cu}p}} \quad (57)$

$$k_{\theta w} = \frac{\Theta_p}{\Theta_{\text{Cu}pw}}. \quad (58)$$

Przy założeniu przemiany adiabatycznej przyrost temperatury klina ponad temperaturę początkową jest równy zeru, czyli $\Theta_p = 0$ i $k_{\theta w} = k_{\theta xwt} = 0$. Wtedy minimalny przyrost temperatury miedzi przy podgrzewaniu wstępnym wynosi

$$\Theta_{\text{Cu}pw} = \Theta_{\text{Cu}p} \cdot (1 - k_a \cdot k_{\theta}) \frac{\sigma_g}{E \cdot a_{\text{Cu}}}, \quad (59)$$

a minimalny czas podgrzewania wstępnego

$$t_w = \frac{h_z \cdot b_z \cdot \xi \cdot g \cdot c}{p_z} \cdot \left[\Theta_{\text{Cu}px} \cdot (1 - k_a \cdot k_{\theta}) - \frac{\sigma_g}{E \cdot a_{\text{Cu}}} \right]. \quad (60)$$

7. WNIOSKI

Naprężenia termiczne, zjawiające się w prętach uzwojenia wirnika turbogenerатора przy normalnym rozruchu mogą w stanie nieustalonym przewyższać naprężenia termiczne w stanie ustalonym.

Przytoczone rozważania dotyczące stanu nieustalonego przewodzone są dla konkretnego, szczególnego przypadku i przy przyjęciu całego szeregu założeń upraszczających. W rzeczywistości zjawisko może przebiegać nieco inaczej, niż to określają wzory (1—23); w każdym jednak razie można przyjąć, że przebieg funkcji $\varepsilon_{xt}=f(t)$ pokazany na rys. 2 jest w przybliżeniu słuszny dla większości rozwiązań konstrukcyjnych żłobka. Dla dokładniejszego scharakteryzowania tego przebiegu przy innych konstrukcjach żłobka należy w sposób możliwie dokładny ustalić rozkłady temperatur w prętach i w stali.

Na tej podstawie można wysnuć wniosek, że przy małych współczynnikach tarcia, dla których siła tarcia jest mniejsza od naprężeń termicznych, należy się liczyć z możliwością wysuwania się części żłobkowych prętów w kierunku połączeń czołowych. Dla tych przypadków odkształcenie trwałe zależy od maksymalnej wartości naprężeń w stanach nieustalonych.

Przy większych wartościach współczynników tarcia należy oczekiwać wciągania części czołowych prętów do żłobków. Dla tych przypadków odkształcenie trwałe zależy od maksymalnej wartości naprężeń w stanach ustalonych.

Podana metoda określania temperatury i czasu podgrzewania wstępnego może być zastosowana dla obydwu przypadków, dzięki czemu można zapobiec zarówno wydłużaniu się, jak i kurczeniu się prętów.

8. PRZYKŁAD LICZBOWY

Konkretny przykład przeliczony jest dla typowego generatora o mocy 25 MW,

Dane:

Znamionowe moce generatora	$P_n = 25 \text{ MW}$
Znamionowe straty wzbudzenia	$\Delta P_{2Cu} = 36 \cdot 10^{-4} \cdot P_n = 90000 \text{ W}$
Średnia długość pręta uzwojenia wirnika	$l_{2z} = 435 \text{ cm}$
Liczba żłobków wirnika	$Z_2 = 28$
Ilość ciepła odprowadzona z 1 żłobka	
na 1 cm jego długość wynosi	$p_z = \frac{\Delta P_{2Cu}}{Z_2 \cdot l_{2z}} = \frac{90000}{28 \cdot 435} \approx 7,4 \text{ W/cm}$
Szerokość zęba u nasady	$b_1 = 1,75 \text{ cm}$
Szerokość zęba u wierzchołka	$b_2 = 3,9 \text{ cm}$
Wysokość zęba	$h = 15,6 \text{ cm}$
Szerokość żłobka	$b_z = 2,6 \text{ cm}$
Obwód izolacji żłobkowej	$O_i = 31,2 \text{ cm}$
Grubość izolacji żłobkowej	$\Delta_i = 1,5 \text{ mm}$
Ciepłota oporność właściwa izolacji żłobkowej	$k_i = 835 \frac{\text{cm}^2 \cdot ^\circ\text{C}}{\text{W/cm}}$

Strumień ciepły przenikający
przez 1 cm powierzchni izolacji
żłobkowej

$$p_i = \frac{p_z}{O_i} = \frac{7,4}{31,2} = 0,237 \text{ W/cm}^2$$

Spadek temperatury w izolacji
żłobkowej

$$\Theta_i = k_i \cdot p_i \cdot \Delta_i = 835 \cdot 0,237 \cdot 0,15 = 29,6^\circ\text{C}$$

Ciepłna oporność właściwa stali

$$k_{Fe} = 2,2 \frac{\text{cm}^2 \cdot ^\circ\text{C}}{\text{W} \cdot \text{cm}}$$

Spadek temperatury w zębie

$$\begin{aligned} \Theta_z &= k_{Fe} \cdot p_z \cdot \frac{h}{b_2 - b_1} \cdot \left(1 - \frac{b_1}{b_2 - b_1} \cdot l_n \frac{b_2}{b_1} \right) \approx \\ &\approx 2,2 \cdot 7,4 \cdot \frac{15,6}{3,9 - 1,75} \cdot \left(1 - \frac{1,75}{3,9 - 1,75} \cdot l_n \frac{3,9}{1,75} \right) \approx 40,9^\circ\text{C} \end{aligned}$$

Różnica między temperaturą naj-
gorętszej warstwy miedzi na dnie
żłobka i temperaturą klina

$$\Theta_{k_0} = \Theta_i + \Theta_z = 29,6 + 40,9 = 70,5^\circ\text{C}$$

Temperatura najgorętszej warstwy
miedzi (dopuszczalna)

$$\vartheta_{Cu1} = 140^\circ\text{C}$$

Temperatura początkowa

$$\vartheta_p = 20^\circ\text{C}$$

Przyrost temperatury klina

ponad temperaturę początkową

$$\begin{aligned} \Theta_p &= \vartheta_{Cu1} - (\vartheta_p + \Theta_i + \Theta_z) = \\ &= 140 - (20 + 29,6 + 40,9) = 49,5^\circ\text{C} \end{aligned}$$

Przyrost temperatury najgorętszej
warstwy miedzi

$$\Theta_{Cu p} = \vartheta_{Cu1} - \vartheta_p = 140 - 20 = 120^\circ\text{C}$$

$$k_\Theta = \frac{\Theta_p}{\Theta_{Cu p}} = \frac{49,5}{120} = 0,412$$

$$k_\sigma = \frac{\alpha_{Fe}}{\alpha_{Cu}} = \frac{11,5 \cdot 10^{-6}}{17 \cdot 10^{-6}} = 0,68$$

$$\alpha_{Cu} = 17 \cdot 10^{-6} / ^\circ\text{C}$$

$$E = 10^6 \cdot \text{kG/cm}^2$$

$$\sigma_g = 700 \text{ kG/cm}^2$$

Zwykle bez podgrzewania wstępnego naprężenia dochodzą do wartości $\sigma = 1400 \text{ kG/cm}^2$. Granica sprężystości wynosi około 500 kg/cm^2 . Przyjęta wartość $\sigma_g = 700 \text{ kG/cm}^2$ leży niewiele powyżej granicy sprężystości, więc odkształcenia trwale będą nieznaczne.

$$E \cdot \alpha_{Cu} = 10^6 \cdot 17 \cdot 10^{-6} = 17 \frac{\text{kG}}{\text{cm}^2 \cdot ^\circ\text{C}}$$

$$\Theta_{Cu pw} = \Theta_{Cu p} \cdot (1 - k_\sigma \cdot k_\Theta) - \frac{\sigma_g}{E \cdot \alpha_{Cu}} = 120 \cdot (1 - 0,68 \cdot 0,412) - \frac{700}{17} = 45^\circ\text{C}$$

Ciepło właściwe miedzi

$$c = 0,0908 \frac{\text{k cal}}{\text{kg} \cdot ^\circ\text{C}} = 0,38 \frac{\text{W} \cdot \text{s}}{\text{g} \cdot ^\circ\text{C}}$$

Współczynnik wypełnienia

miedzią żłobka wirnika

$$\xi = 0,6$$

Ciężar właściwy miedzi

$$g = 8,9 \text{ G/cm}^3$$

Minimalny czas podgrzewania
wstępnego

$$t_w = \frac{h_z \cdot b_z \cdot \xi \cdot g \cdot c}{p_z} \cdot \Theta_{Cu pw} = \frac{15,6 \cdot 2,6 \cdot 0,6 \cdot 8,9 \cdot 0,38}{7} \cdot 45^\circ \text{C} \approx 530 \text{ s} \approx 9 \text{ min}.$$

Napężenia, jakie wystąpią w górnej warstwie miedzi

$$\sigma_{xr} = 17 \cdot [\Theta_{Cu px} \cdot (1 - 0,68 \cdot k_{\Theta x}) - \Theta_{Cu pxw}].$$

$$\Theta_{Cu px} = \Theta_p + \Theta_i = 49,5 + 29,6 = 79,1^\circ \text{C}$$

$$k_{\Theta x} = \frac{49,5}{79,1} = 0,625$$

$$\Theta_{Cu pxw} = 45^\circ \text{C}$$

$$\sigma_{xr} = 17 \cdot [79,1 \cdot (1 - 0,68 \cdot 0,625) - 45] \approx 3,6 \text{ kG/m}^2.$$

Politechnika Warszawska

WYKAZ LITERATURY

1. Coates R. H. i Pyle B. C.: *The Operation of large turbo-alternators to reduce rotor winding deformation*. Journal IEE vol. 93, cz. II, nr 32, April 1946 s. 192.
2. Ermel W.: *Verformung von Induktorwicklungen durch Wärmedehnung und ihre Beherrschung durch betriebliche Massnahmen*. Elektrizitaetswirtschaft. Frankfurt a. Main. Oktober 1953, Heft 20, s. 603.
3. Holley C. H. i Savidge R. E.: *Improved field conductor materials of turbine generators*. AIEE Transactions. April 1955, s. 72.
4. Juhlin G. A.: *Deformation of turbo-alternator rotor windings due to temperature rise*. Journal IEE. London, vol. 85, cz. II, 1939.
5. Komar E. G.: *Woprosy projektirovaniya turbogeneratorow*. Gosenergoizdat Moskwa—Leningrad 1955.
6. Kolbe W.: *Betriebserfahrungen mit Induktoren grosser Abmessung*. Elektrizitaetswirtschaft. Frankfurt a. Main, April 1953, Heft 8, s. 182.
7. Noest J. G.: *Prevention of rotor winding deformation on turbogenerators*. AIEE Transactions, July 1944, p. 514.
8. Reay D. B.: *Distortion of turbo-alternator rotor windings through thermal Stress*. Proceeding IEE P. A. London, vol. 102, June 1955.

ТЕРМИЧЕСКИЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ОБМОТКАХ РОТОРОВ ТУРБОГЕНЕРАТОРОВ

При традиционном пуске турбогенератора в обмотках ротора возникают термические напряжения вызванные тем, что температура стержней обмотки выше, чем температура клина и внешней поверхности зубцов, а температурный коэффициент линейной расширяемости меди больше чем стали. Температура стержней обмотки обычно растет быстрее, чем температура окружающей

их стали. Поэтому в течение переходного температурного процесса разница нагрева стержней обмотки клина и зубцов, равно как и температурные напряжения, больше чем в установившемся тепловом режиме. Если термические напряжения больше чем напряжения от сил трения, то стержни подвержены остаточному удлинению в случае если эти напряжения превышают предел упругости. Преимущественно термические напряжения меньше, чем силы трения, что при превышении предела упругости ведет к остаточному укорачиванию стержней. В этих случаях остаточные деформации определяются напряжениями выступающими в установившемся температурном режиме. Явления ползучести и релаксации стержней увеличивают их остаточные деформации. Самым простым способом предотвращения остаточных деформаций является применение предварительного адиабатического нагрева стержней обмотки при помощи повышенного тока ротора. Для определения соответствующей температуры и времени подогревания обмотки при предварительном подогреве необходимо знание распределения температуры во время работы обмотки в установившемся рабочем режиме.

THERMAL STRESSES IN WINDINGS OF TURBO-GENERATOR ROTORS

Traditional turbo-generator starting-up gives a rise to thermal stresses. This is due to higher temperature in winding bars in comparison with the temperature developed in the wedge and outer surface of teeth, and to the greater expansion coefficient of copper compared with that of steel.

In general, the rate of temperature rise in winding bars is higher than that in steel. In consequence the difference of temperatures in winding bars and the wedge, as well as the thermal stresses in bars are greater in transient state than in steady-state. If thermal stresses surpass the stresses caused by the friction forces the bars undergo a permanent elongation as the elastic limit is being surpassed. More frequently, however, thermal forces exceed the friction forces, what results in permanent contraction of bars, if the elastic limit is surpassed.

In such instances the stresses arising in thermal steady-state play decisive part. Creep and relaxation phenomena increase the permanent deformation of the bars. Adiabatic pre-heating, if assisted by powerful current in the rotor, is the most efficient way to avoid the permanent deformation. To determine the relative temperature rise in rotor windings at pre-heating period and time required for pre-heating a sound knowledge as regard the distribution of temperature in windings during running period is required.

621.316.91

T. LIPSKI

Kryteria prawidłowości działania bezpieczników w obwodach prądu stałego

Rękopis dostarczono 11. 6. 1960 r.

Praca dotyczy kryteriów prawidłowości działania bezpieczników niskonapięciowych przy wyłączaniu prądów zwarciovych i przeciążeniowych w obwodach prądu stałego. Przez wprowadzenie wskaźnika prądu ograniczonego udało się znaleźć uniwersalną charakterystykę tego prądu. Charakterystyka ta umożliwia szybkie znalezienie prądu ograniczonego dla dowolnego bezpiecznika działającego w obwodzie o dowolnym spodziewanym prądzie zwarciovym i o dowolnej stałej czasowej. Następnie rozpatrzono warunki energetyczne towarzyszące wyłączaniu prądów zwarciovych w dowolnych obwodach probierczych o $T = \text{const}$ i $L = \text{const}$ dla dowolnego bezpiecznika. Przy $T = \text{const}$ maksimum energetyczne występuje przy stosunku prądu ograniczonego do prądu spodziewanego równym około 0,6. Przy $L = \text{const}$ energia wydzielona w łuku rośnie nieustannie ze wzrostem prądu spodziewanego. Przeprowadzono analizę wymagań norm i przepisów na podstawie wyprowadzonych warunków energetycznych. Określono konieczne parametry obwodów probierczych i porównano z parametrami niektórych obwodów eksploatacyjnych. Ustalono, że wymagania przepisów brytyjskich są najbardziej zbliżone do warunków w obwodach eksploatacyjnych. Omówiono warunki energetyczne towarzyszące wyłączaniu prądów przeciążeniowych. Zestawiono wyniki analizy w formie wykresów.

Zastosowanie bezpieczników niskonapięciowych w urządzeniach prądu stałego jest wciąż aktualne. W dalszym ciągu elektryfikuje się prądem stałym urządzenia w hutnictwie, w przemyśle chemicznym, w trakcji elektrycznej i w okrętownictwie. Kładzie się nacisk na dobre przystosowanie bezpieczników do wyłączania prądów zwarciovych i przeciążeniowych. Zdolność wyłączania bezpiecznika zależy od warunków obwodu. Konieczność jednolitych metod probierczych, odpowiadających w przybliżeniu warunkom rzeczywistym, skłania do określenia przepisowych obwodów probierczych. Znamionowa zdolność wyłączania, określona w obwodzie przepisowym, jest podstawą zakwalifikowania bezpiecznika do zastosowania w urządzeniach.

Obwody probiercze są różne według różnych przepisów. Ażeby zadośćuczynić różnym przepisom, należy wykonać analizę kryteriów prawidłowości wyłączania bezpieczników w różnych obwodach przepisowych.

W niniejszej pracy prowadzi się analizę wzajemnego ustosunkowania: 1) znamionowej zdolności wyłączania określonej według różnych przepisów, 2) parametrów obwodów probierczych i obwodów eksploatacyjnych. Poszukuje się metody pozwalającej na określenie zdolności wyłączania bezpiecznika w dowolnych obwodach probierczych oraz zasady wyznaczania najwłaściwszych obwodów probierczych.

1. UNIWERSALNA CHARAKTERYSTYKA PRĄDU OGRANICZONEGO

Jak wiadomo, sprawność przerywania prądu zwarciovego pozostaje w związku ze stopniem ograniczania prądu zwarciovego przez bezpiecznik. Rozpatrzenie tego związku jest punktem wyjścia do osiągnięcia celu niniejszej pracy.

Prąd zwarciový i w obwodzie prądu stałego narasta do wartości ustalonego prądu zwarciovego I_u w zasadzie według funkcji wykładniczej

$$i = I_u (1 - e^{-\frac{t}{T}}), \quad (1)$$

w której:

$$T = \frac{L}{R} \text{ — stała czasowa obwodu zwarciovego,}$$

L — indukcyjność obwodu zwarciovego,

R — oporność obwodu zwarciovego.

W czasie narastania prądu przy zwarciu w pobliżu źródła występują jednak takie zmiany indukcyjności i oporności źródła, że krzywa wzrostu prądu odbiega nieco od najprostszej charakterystyki wykładniczej (1).

Napięcie źródła i oporność obwodu zwarciovego bez oporności bezpiecznika wyznaczają wielkość spodziewanego ustalonego prądu zwarciovego. Oporność bezpiecznika zmniejsza ten prąd tym bardziej, im większy jest stosunek spodziewanego ustalonego prądu zwarciovego do prądu znamionowego bezpiecznika I_n . Oporność bezpiecznika zmienia się przy tym wskutek nagrzewania różnych części elementu topikowego do chwili zapłonu łuku. Rzeczywisty prąd ograniczony występujący w pobliżu chwili zapłonu w bezpieczniku łuku, obliczony z przebiegu (1), będzie więc inny. Dla uproszczenia dalszych rozważań przyjęto jednak, że oporność bezpiecznika nie ma wpływu na przebieg prądu i .

W zakresie prądów zwarciovych, gdy czasy do chwili zapłonu łuku we wkładce bezpiecznika są krótkie (dla elementów topikowych przewężonych na ogół nie dłużej niż 0,1 s [2] i [3]), przyjmuje się, że ciepło nie jest odprowadzane z miejsc jego wydzielania. Dla takich warunków słuszne jest równanie

$$\int_0^{t_p} i^2 dt = S_z^2 K, \quad (2)$$

gdzie:

S_z — zwarciovyy (najmniejszy) przekrój elementu topikowego w mm^2 ;

K — współczynnik zależny od materiału tego elementu ($K_{\text{Cu}} = 100\,000 \text{ A}^2\text{s/mm}^4$, $K_{\text{Ag}} = 72\,000 \text{ A}^2\text{s/mm}^4$);

t_p — czas przedłukowy bezpiecznika w s.

Wartość współczynnika K zależy również od sił elektrodynamicznych i od efektu naskórkowości w elemencie topikowym, wywołanych przez prąd zwarciovyy przed zapłonem łuku i może się zmieniać w pewnych granicach. Jednak w obliczeniach charakterystyk prądu ograniczonego szereg autorów pomija tę okoliczność uważając, że zmiany te nie są zbyt istotne [np. 2, 4 i 5].

Do uproszczonych obliczeń prądu ograniczonego w pracach wielu autorów przyjmuje się prostoliniowy wzrost prądu ze stromością równą stromości początkowej charakterystyki wykładniczej. Uproszczenie to prowadzi do coraz mniejszych błędów obliczeń ze wzrostem stosunku I_u/I_n . W nowszej pracy [5] zaleca się wykonywanie obliczeń według wzrostu prostoliniowego z możliwością wprowadzenia poprawki zależnie od stosunku I_u/I_n dla danego bezpiecznika. Jednakże brak jest w tych pracach wyprowadzeń ogólnych dla dowolnego bezpiecznika, które umożliwiłyby osiągnięcie celu postawionego w niniejszej pracy.

W tym celu dla uniezależnienia się od parametru $S_z^2 K$ danego bezpiecznika wprowadzono wskaźnik prądu ograniczonego

$$z = \frac{I_u^2 T}{S_z^2 K}. \quad (3)$$

Z równań (1), (2) i (3) otrzymujemy

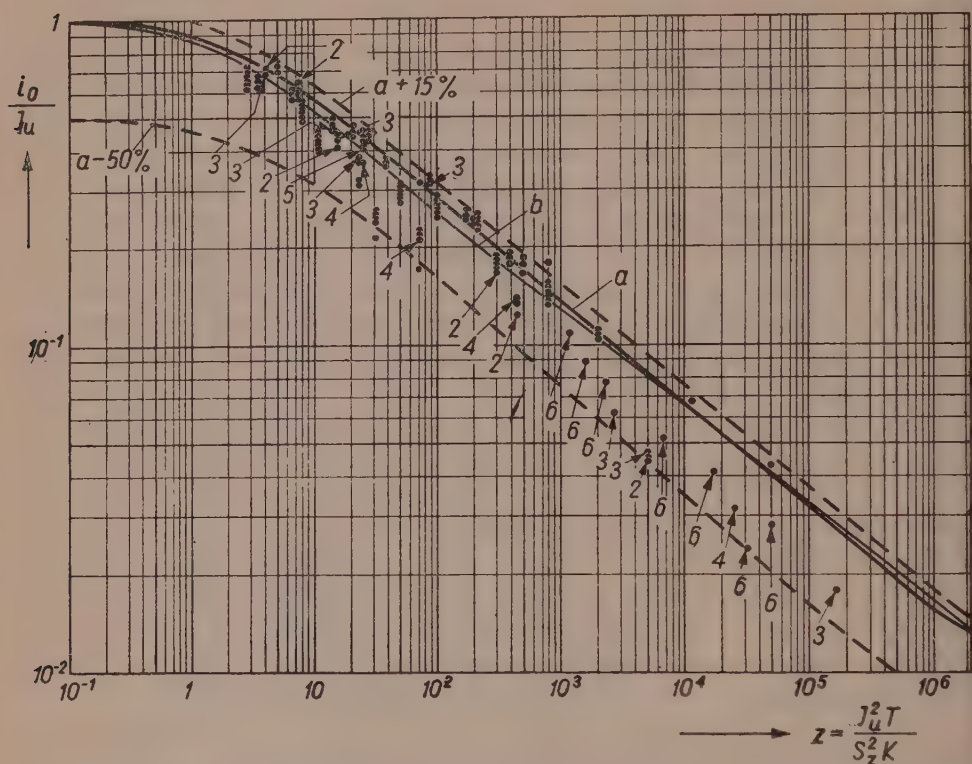
$$\frac{t_p}{T} + 2e^{-\frac{t_p}{T}} - 0,5e^{-2\frac{t_p}{T}} - 1,5 = \frac{1}{z}. \quad (4)$$

Wzór (4) pozwala określić stosunek t_p/T w zależności od wskaźnika z . Wskaźnik z umożliwia zbudowanie uniwersalnej charakterystyki prądu ograniczonego i_0 , występującego w chwili $t = t_p$. Mianowicie, na podstawie równań (1) i (4) można zbudować wykres

$$\frac{i_0}{I_u} = f(z). \quad (5)$$

Na rys. 1 przedstawiono ten wykres (krzywa a) oraz przebieg funkcji aproksymującej (krzywa b), odpowiadającej równaniu

$$\frac{i_0}{I_u} = (1 - e^{-\frac{1}{z}})^{\frac{1}{3,36}}. \quad (6)$$



Rys. 1. Zależność stosunku i_0/I_u od wskaźnika prądu ograniczonego z .

a — krzywa teoretyczna, b — aproksymacja $i_0/I_u = (1 - e^{-z})^{1/3,36}$, $a + 15\%$ i $a - 50\%$ — krzywe przebiegające równolegle do krzywej a i ograniczające obszar, w którym mieszczą się wartości z 205 pomiarów. Cyfry na wykresie oznaczają liczby punktów pomiarów o bardzo zbliżonych wynikach.

Równanie to ustalono mając na uwadze, że przy $z \rightarrow 0$ stosunek i_0/I_u powinien zmierzać do 1, a przy $z \rightarrow \infty$ stosunek i_0/I_u powinien zmierzać do 0. Wykładnik $\frac{1}{3,36}$ tak dobrano, aby krzywa b przebiegała z najmniejszymi odchyłkami względem krzywej a .

Krzywa a lub równanie (6) umożliwia szybkie znalezienie prądu ograniczonego dla dowolnego bezpiecznika działającego w obwodzie o dowolnym spodziewanym prądzie zwarciovym i o dowolnej stałej czasowej T .

Ażeby sprawdzić przydatność krzywej a (rys. 1) dla praktyki obliczeniowej przeprowadzono w Zakładzie Elektrotechniki Morskiej Instytutu Elektrotechniki pomiary prądów ograniczonych dla wkładek bezpiecznikowych różnej budowy.

Do prób użyto: krajowe bezpieczniki stacyjne (wielkiej mocy) zwłoczne Bm Wto 6 i 10 A z drutem Cu bez przewężenia zwarciovego, 35, 60, 100, 125, 160 i 200 A wielopaskowe Cu z przewężeniem zwarciovym w stosunku 1:2 bez mostków zapłonowych; krajowe bezpieczniki instalacyjne zwłoczne Bi Wto 80 i 100 A wielopaskowe Ag z przewężeniem zwarciovym w stosunku 1:2 z mostkami zapłonowymi oraz szybkie Bi Wts 50 A dwupaskowe Ag z przewężeniem zwarciovym w stosunku 1:2 z mostkami zapłonowymi; bezpieczniki instalacyjne niemieckie zwłoczne TDz II 2 i 15 A z drutem Cu srebrzonym bez przewężenia, TDz III 60 A jednopaskowe Cu srebrzone z przewężeniem zwarciovym w stosunku 1:2 oraz bezpieczniki instalacyjne duńskie szybkie ze znakiem D na okuciu 6, 10 i 20 A z drutem Cu srebrzonym bez przewężenia. Warunki prób bezpieczników instalacyjnych odpowiadały wymaganiom przepisów VDE 0635 (por. tablica 1), przy czym pomiary wykonano dla obwodów z indukcyjnością 0,5 i 1 mH przy napięciu 550 V. Próby bezpieczników stacyjnych przeprowadzono przy napięciu 250 V i przy prądach 10, 20 i 30 kA, zachowując stałą czasową $T=15$ ms.

Wyniki pomiarów przedstawiono na rys. 1. Ze względu na czytelność rysunku nie wprowadzono różnych oznaczeń wyników uzyskanych dla różnych odmian bezpieczników. Dość duże odchyłki od krzywej a zawarte pomiędzy wartościami $+15\%$ i -50% (krzywe przerywane) pochodzą zapewne głównie z produkcyjnych rozrzutów elementów topikowych, a poza tym ze wskazanych już zmian wartości K w elementach topikowych o różnej konstrukcji oraz z oddziaływania oporności bezpiecznika na przebieg prądu zwarciovego. Szczegółowa analiza nie doprowadziła do wykrycia jakiegś prawidłowości wpływu na wyniki materiału i ukształtowania przekroju zwarciovego. Nie bez znaczenia jest również dokładność pomiarów oscylograficznych, wynosząca dla większych wartości i_0/I_u około 2% , a dla mniejszych wartości i_0/I_u — około 15% .

Porównanie wyników obliczeń i_0/I_u z wynikami prób przedstawionymi na rys. 1 wskazuje na możliwość korzystania z krzywej a dla praktycznych obliczeń prądu ograniczonego. Wartości obliczone są raczej większe od wartości rzeczywistych.

2. PRZEPISOWE OBWODY PROBIERCZE

W dziedzinie uniwersalnych wkładek bezpieczników instalacyjnych zwłocznych i szybkich na znamionowe napięcie robocze 500 V obowiązują w Polsce normy resortowe RN-MPM-18012 i RN-MPM-18013 z grudnia 1954 r. [6] wzorowane na przepisach VDE 0635/3.53 [7]. Przy eksporcie w stosunku do bezpieczników instalacyjnych powinny obowiązywać przepisy CEE, mianowicie Publikacja 16 z października 1955 [8].

Tablica 1

Wymagania przepisów i norm, dotyczące zwarciowej zdolności wyłączania bezpieczników instalacyjnych i stacyjnych

Rodzaj bezpiecznika	Przepisy lub norma	I_n A	I_u kA	T ms	L mH	U_p —	Inne wymagania
instalacyjny	RN-MPM-18013 i VDE 0635/3.53 dla bezpieczników szybkich 500 V	≤ 25	1,5	—	$1 \pm 0,15$	1,1. U_n	podczas próby źródło dodatkowo obciążone prądem bezindukcyjnym 10 A
		> 25	5,5	—	$1 \pm 0,15$	1,1. U_n	
		≤ 200	10,0	—	$1 \pm 0,15$	1,1. U_n	
	RN-MPM-18012 i VDE 0635/3.53 dla bezpieczników zwłoczących	≤ 25	1,6	$\begin{smallmatrix} +0,5 \\ 3,5 \\ -0 \end{smallmatrix}$	—	1,1. U_n	
	CEE. Publication 16*	> 25 ≤ 63	4,0	$\begin{smallmatrix} +0,5 \\ 7,0 \\ -0 \end{smallmatrix}$	—	1,1. U_n	
		> 63	8,0	$\begin{smallmatrix} +0,5 \\ 15,0 \\ -0 \end{smallmatrix}$	—	1,1. U_n	
stacyjny	VDE 0660/12.52	wszys- tkie	25,0	$\begin{smallmatrix} +0,75 \\ 15 \\ -0,75 \end{smallmatrix}$	—	U_n	
instalacyjny i stacyjny	B.S.88:1952	W1	1,0	3-0	—	U_n	jeśli $i_0 < 0,6I_u$, to należy wykonać próbę przy $0,8I_u > i_0 > 0,6I_u$
		W2	4,0	4-0	—	U_n	
		W3	16,5	10-0	—	U_n	
		W4	33,0	15-0	—	U_n	
		W5	46,0	—	—	U_n	

Oznaczenia przyjęte w tablicy:

 I_n — prąd znamionowy bezpiecznika I_u — prąd spodziewany (wartość ustalonego prądu) T, L — stała czasowa i indukcyjność obwodu

*) Poza tymi wymaganiami, bezpiecznik powinien być wypróbowany przy prądach

dla $I_n \leq 5 \text{ A} - I_u = 375 \text{ A}$; dla $5 < I_n < 10 \text{ A} - I_u = 750 \text{ A}$; $T = 3,5 + 0,5 \text{ ms}$

U_p — napięcie powrotne
 i_0 — prąd ograniczony
 W1, W2, W3, W4, W5 — wielkość zwarciowe

Dodatkowe obciążenie źródła prądem 10 A w próbach zwarciowych wg norm RN i przepisów VDE ma na celu odwzorowanie warunków obciążenia źródła innymi obwodami podczas wyłączania zwarcią w obwodzie rozpatrywanym. Obciążenie to ujednolica też warunki prób z punktu widzenia napięcia powrotnego w różnych laboratoriach dyspozycyjnych i indukcyjnościach zwarciowych.

Niektórzy odbiorcy zagraniczni wymagają zgodności bezpieczników instalacyjnych z przepisami VDE 0635/3.53.

W dziedzinie bezpieczników stacyjnych brak jest normy krajowej. Konstruktorzy i odbiorcy tych bezpieczników zwykle troszczą się o to, by odpowiadały one wymaganiom przepisów VDE 0660/12.52 [9].

Z uwagi na konieczność klasyfikowania krajowych bezpieczników instalacyjnych i stacyjnych przez okrętowe towarzystwo klasyfikacyjne Llod's Register of Shipping, konieczne jest uwzględnianie postanowień przepisów brytyjskich B. S. 88:1952 [10].

W tablicy 1 zestawiono wymagania wymienionych przepisów i norm w sprawie zdolności wyłączania w obszarze prądów zwarciovych, a w tablicy 2 — w obszarze prądów przeciążeniowych. Widać dużą różnorodność w sposobie ujęcia tych wymagań.

Tablica 2

Wymagania przepisów i norm, dotyczące przeciążonej zdolności wyłączania bezpieczników instalacyjnych i stacyjnych

Rodzaj bezpiecznika	Przepisy lub norma	I_n	I_n	T	U_p
		A	—	ms	—
instalacyjny	RN-MPM-18012, RN-MPM-18013 i VDE 0635/3.53 dla bezpiecz- ników szybkich i zwło- cznych 500 V.	≤ 200	$2,5 \cdot I_n$	—	$1,1 \cdot U_n$
		≤ 60	$3,5 \cdot I_n$	—	$1,1 \cdot U_n$
		≤ 200	$4 \cdot I_n$	—	$1,1 \cdot U_n$
		≤ 200	$10 \cdot I_n$	—	$1,1 \cdot U_n$
	CEE. Publication 16	≤ 200	$2,5 \cdot I_n$	—	$1,1 \cdot U_n$
		≤ 200	$4 \cdot I_n$	—	$1,1 \cdot U_n$
		≤ 200	$8 \cdot I_n$	—	$1,1 \cdot U_n$
stacyjny	VDE 0660/12.52	wszystkie	$6 \cdot I_n$	$1 + 0,05$ $- 0,05$	U_n
instalacyjny i stacyjny	B.S.88:1952	wszystkie	I	*)	U_n

W tablicy oznaczenia zgodne z oznaczeniami przyjętymi w tablicy 1, a ponadto:

I — prąd spodziewany w próbach wg B.S.88:1952 powinien wynosić co najwyżej 1,4 średniego arytmetycznego prądu granicznego.

*) Stała czasu nie może być mniejsza od 3 ms dla prądu spodziewanego do 1000 A i nie mniejsza od 4 ms dla prądu spodziewanego powyżej 1000 A.

3. WYŁĄCZANIE PRĄDÓW ZWARCIOWYCH

Energia wydzielona w bezpieczniku E_B w czasie palenia się łuku ma duże znaczenie. Badania Baxter'a [1] wskazują na to, że przy dużym prądzie wyłączanym przez bezpiecznik pod napięciem stałym około 70% energii wydzielonej w łuku pochodzi z energii pola magnetycznego

obwodu $E_M = \frac{L i_0^2}{2}$, a reszta energii E_z jest dostarczana przez źródło.

W naszych badaniach okazało się, że udział energii E_M jest zależny od konstrukcji bezpiecznika i zmienia się od około 50% dla bezpieczników na mniejsze prądy znamionowe do około 80% — na większe prądy znamionowe. Wyniki te otrzymano na podstawie obliczeń z oscylogramów prób wymienionych w p. 1.

Analiza warunków wyłączenia prądu zwarciovego przez bezpiecznik dla różnych I_u może być ograniczona do rozpatrzenia energii E_M w zależności od właściwości elementu topikowego określających parametr $S_z^2 K$. Stwierdzono drogą własnych pomiarów na bezpiecznikach stacyjnych typu Bm Wto i na bezpiecznikach instalacyjnych typu Bi Wto i Bi Wts, że przy wzroście energii E_M rośnie w tych konstrukcjach także energia E_B . Widać to choćby z zestawienia wartości energii E_M i E_B dla kilku prądów znamionowych bezpieczników Bm Wto podanego w tabelicy 3. Zwraca uwagę ciekawa prawidłowość malenia udziału energii E_M dla większych prądów I_u przy zachowaniu $T = \text{const}$.

Tabela 3

Wartości energii E_M i E_B obliczone z oscylogramów wyłączenia prądów zwarciovych przez bezpieczniki Bm Wto, $T = 15 \text{ ms}$ $U_p = 250 \text{ V}$

I_u	$I_n = 60 \text{ A}$			$I_n = 100 \text{ A}$			$I_n = 125 \text{ A}$			$I_n = 200 \text{ A}$		
	E_M	E_B	E_M/E_B	E_M	E_B	E_M/E_B	E_M	E_B	E_M/E_B	E_M	E_B	E_M/E_B
kA	kWs	kWs	—	kWs	kWs	—	kWs	kWs	—	kWs	kWs	—
10	1,5	2,4	0,63	3,5	5,2	0,68	4,7	6,6	0,71	10	13,5	0,74
20	1,3	2,2	0,59	3,1	5,1	0,6	4,2	6,2	0,68	9,6	13,4	0,72
30	1	2,1	0,48	2,3	4,1	0,56	3,2	5,4	0,59	8	12	0,61

Z przeglądu tabelicy 1. wynika, że można rozróżnić dwa sposoby podawania wymagań dla obwodu zwarciovego: 1) wymagana wartość T bądź zależna od prądu znamionowego lub od wielkości zwarcioviej (B. S. 88:1952 i CEE), bądź jednakowa dla wszystkich bezpieczników (VDE 0660); 2) wymagana wartość L , jednakowa dla wszystkich bezpieczników (VDE 0635 i RN—MPM). Wypada więc rozpatrzyć, jak przedstawia się energia E_M w funkcji parametru z przy $T = \text{const}$ i przy $L = \text{const}$.

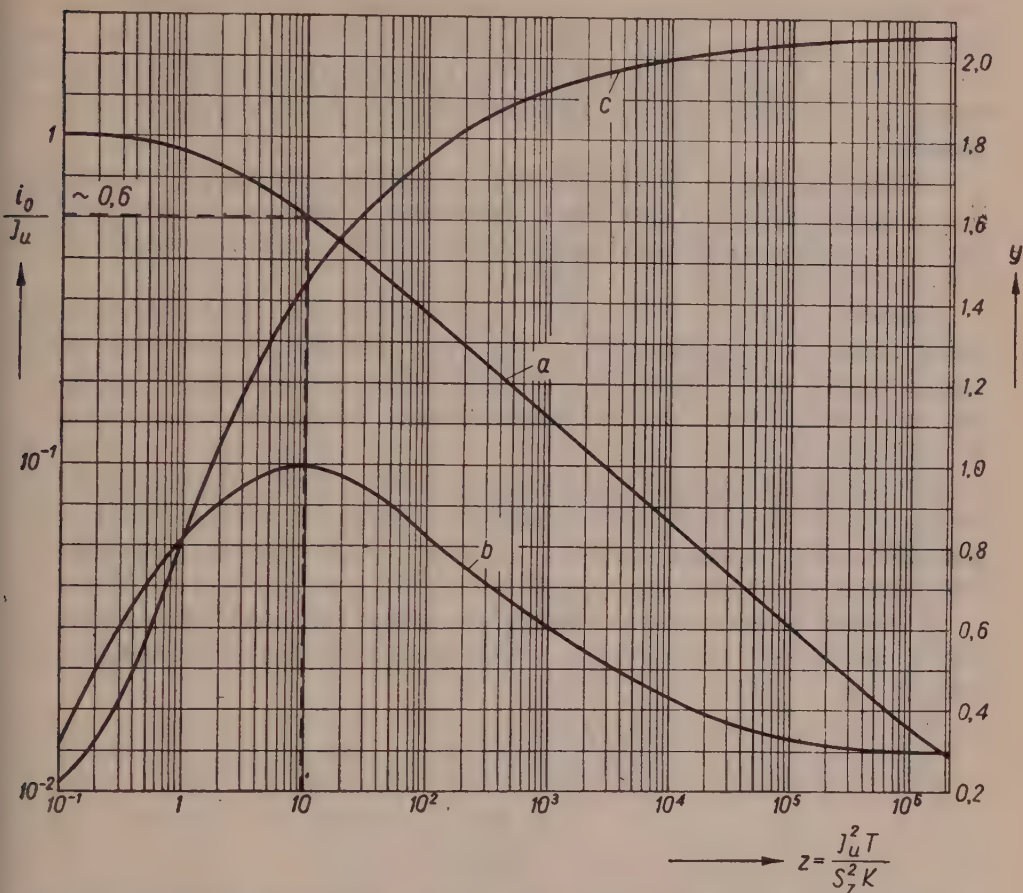
3.1. Wyłączenie przy $T = \text{const}$

Wyzyskując zależność (3) i pamiętając, że $E_M = \frac{Li_0^2}{2}$, otrzymujemy następujący wzór

$$E_M = \frac{U}{2} \sqrt{S_z^2 K T} \left(\frac{i_0}{I_u} \right)^2 \sqrt{z}, \quad (7)$$

który wspólnie z (5) pozwala wyznaczyć graficznie funkcję $E_M = f(z)$.

Na rys. 2. przedstawiono przebieg tej funkcji krzywą b, mianowicie zależność pomocniczej wielkości $y = \left(\frac{i_0}{I_u} \right)^2 \sqrt{z}$ od parametru z . Przejście



Rys. 2. Zależność pomocniczej wielkości y od wskaźnika prądu ograniczonego z .
 a — krzywa teoretyczna $i_0/I_u = f(z)$

$$b - y = \left(\frac{i_0}{I_u} \right)^2 \sqrt{z} \quad \text{przy } T = \text{const}; \quad \text{dla } i_0/I_u \approx 0,6, \quad E_M = \text{max}$$

$$c - y = \left(\frac{i_0}{I_u} \right)^2 \sqrt{z^2} \quad \text{przy } L = \text{const}; \quad \text{dla } i_0/I_u \rightarrow \infty \quad E_M = \text{max}$$

od y do wartości energii E_M wymaga według wzoru (7) pomnożenia przez stałą $\frac{U}{2} \sqrt{S_z^2 K T}$. Na tymże wykresie krzywa a przedstawia znaną już zależność $\frac{i_0}{I_u} = f(z)$.

Maksimum energii E_M występuje przy $\frac{i_0}{I_u} \approx 0,6$ i przy $z \approx 10$. Są to najostrejsze warunki prób zwarciovych przy $T = \text{const}$. Zwiększenie lub

zmniejszenie spodziewanego prądu zwarciovego od tej wartości najostrejszej powoduje zmniejszenie energii E_M . Dzieje się tak dlatego, że ze wzrostem I_u przy $T=\text{const}$ szybko maleje L i tylko bardzo wolno rośnie i_0 , a przy mniejszych I_u maleje szybko i_0 i tylko bardzo wolno rośnie L .

Autorzy normy B. S. 88:1952 wyszli zapewne z założenia, że energia E_M zawsze decyduje o przebiegu wyłączania, ponieważ w normie tej żąda się próby zwarcioviej przy takim prądzie spodziewanym, aby $0,8I_u > i_0 > 0,6I_u$ (tablica 1 — inne wymagania).

Autorzy przepisów CEE prawdopodobnie również starali się zbliżyć próby zwarciove bezpieczników do warunku $E_M = \text{max}$. W tym celu, poza wymaganiami podanymi w tablicy 1, określili oni dodatkowe wymagania dla prób mniejszymi prądami zwarcioowymi, uwidocznione w uwagach do tablicy 1.

Obliczenia wykazują, że w bezpiecznikach instalacyjnych zbliżonych do krajowych typu Bi Wts wyłączanie prądów zwarcioowych w warunkach przepisów CEE następuje przy prądzie $i_0/I_u < 0,6$. Jedynie bezpieczniki zwłoczne 25 A wyłączają przy $i_0/I_u \cong 0,65$.

W obwodzie probierczym według przepisów DVE 0660 dla bezpieczników stacyjnych zupełnie nie uwzględniono omówionego maksimum energii E_M .

3.2. Wyłączanie przy $L = \text{const}$

Dla $L = \text{const}$ zależność (3) można doprowadzić do postaci

$$z = \frac{I_u^3 L}{S_z^2 K U}. \quad (8)$$

Jak poprzednio, otrzymujemy wzór

$$E_M = \frac{1}{2} \sqrt[3]{L(S_z^2 K U)^2} \left(\frac{i_0}{I_u} \right)^2 \sqrt[3]{z^2}, \quad (9)$$

który wspólnie z (5) wyznacza graficznie funkcję $E_M = f(z)$.

Na rys. 2 dodano przebieg tej funkcji krzywą c. Tym razem przedstawiono $y = \left(\frac{i_0}{I_u} \right)^2 \sqrt[3]{z^2}$ w funkcji z . Według tej krzywej E_M rośnie nieustannie przy $z \rightarrow \infty$. A więc przy wzroście prądu spodziewanego warunki wyłączania prądu zwarciovego są coraz trudniejsze. Obserwuje się na krzywej c jakby nasycenie wzrostu E_M przy bardzo wielkich wartościach z . Wynika to z tego, że przy dużych z prąd ograniczony występuje na początkowej, prostoliniowej części krzywej wykładniczej. Początkowa stromość tej krzywej przy $L = \text{const}$ nie zależy od I_u , ponieważ $\frac{U}{L} = \text{const}$.

4. ANALIZA WYMAGAŃ RÓŻNYCH NORM ODNOŚNIE ZWARCIOWEJ ZDOLNOŚCI WYŁĄCZANIA

Porównanie wartości liczbowych E_M (tablica 4) otrzymanych na drodze obliczeniowej według zależności (7) i (9) dla krajowych bezpieczników instalacyjnych szybkich i zwłocznych wykazuje, że najostrzejsze warunki prób zwarciovych dla $I_n \leq 60A$ wynikają z przepisów B. S. 88, wielkość zwarciova W4. Dla $I_n > 60A$ warunki energetyczne według różnych norm są zbliżone, a dla bezpieczników szybkich wymagania VDE są najłagodniejsze.

Tablica 4

Wartości E_M w Ws obliczone dla bezpieczników instalacyjnych szybkich Bi Wts i zwłocznych Bi Wto, które występują w próbach zwarciovych zgodnych z wymaganiami różnych norm i przepisów

I_n A	Bezpieczniki szybkie			Bezpieczniki zwłoczne		
	VDE 0635	CEE	B.S.88W4	VDE 0635	CEE	B.S.88W4
6	54,5	78	164	142	152	315
10	167	178	410	164	167	348
15	138	159	348	213	204	423
20	192	193	460	585	440	915
25	250	226	590	810	565	1190
35	450	530	780	1150	1070	1570
50	875	890	1310	2400	1860	2750
60	1320	1250	1850	2840	2160	3170
80	2130	2750	2750	4150	4320	4320
100	3000	3720	3720	6050	6000	6000
125	3200	3950	3950	—	—	—
160	5000	5900	5900	—	—	—
200	6700	7850	7850	—	—	—

Brak danych dla bezpieczników zwłocznych powyżej 100 A wynika z tego, że w kraju nie produkuje się tych bezpieczników.

Z tablicy 1. oraz z rozważań w p. 3.1. wnioskujemy, że wymagania przepisów B. S. 88 dla bezpieczników stacyjnych wielkości W4 są ostrzejsze od wymagań przepisów VDE 0660 w całym zakresie prądów znamionowych.

5. WARUNKI ZWARCIOWE W EKSPLOATACYJNYCH OBWODACH URZĄDZEŃ PRĄDU STAŁEGO

Warunki zwarciove w przemysłowych i trakcyjnych sieciach prądu stałego, a zwłaszcza zależności L lub T od prądu spodziewanego nie są dostatecznie zbadane. Natomiast, dla obwodów prądu stałego 220 V na statkach ostatnie propozycje włoskie do projektu zaleceń Komisji 18 IEC [11] bardzo wyraźnie uzależniają stałą czasową obwodu od wartości

Tablica 5

Uzależnienie stałej czasowej obwodu T od wartości spodziewanego prądu zwarcowego I_u w instalacjach okrętowych 220 V według propozycji włoskich do IEC [11]

I_u	T	L	R
kA	ms	mH	m Ω
20	7	0,077	11,0
50	12	0,053	4,4
100	18	0,040	2,2

spodziewanego prądu zwarcowego. Propozycje te zestawiono w tablicy 5. Wartości L i R obliczone są z wartości T i I_u i dotyczą zwarć blisko maszyn. Gdy o prądzie I_u decydują oporności przewodów, to zaleca się przyjmować stałą czasową obwodu nie większą niż 5 ms.

Obliczenia wykazują, że w warunkach według tablicy 5 otrzymuje się w przybliżeniu stałą wartość E_M dla określonej wkładki. Prawie niezmienną wartość E_M otrzymano również dla pośrednich wartości prądów I_u , stosując interpolację do ustalenia wartości T . Oznacza to, że ostrość warunków zwarcowych dla bezpieczników w okrętowych sieciach prądu stałego, niedaleko prądnic, jest prawie niezależna od wartości spodziewanego prądu zwarcowego.

Warunki zwarcowe w przemysłowych i trakcyjnych sieciach prądu stałego na lądzie powinny być również zbadane, co pozwoli wyciągnąć bardziej ogólne wnioski o doborze obwodów probierczych, które są podstawą klasyfikowania bezpieczników.

W przepisach B. S. 88. różnym wielkościom zwarcowym bezpieczników odpowiadają różne prądy I_u oraz różne stałe T . Związek między tymi parametrami jest podobny do zależności $T=f(I_u)$ według omówionych już propozycji włoskich z tą jednak różnicą, że w granicach prądów odpowiadających określonej wielkości zwarcowej przyjęto $T=\text{const}$. To założenie nie jest słuszne i wydaje się, że lepiej byłoby pośrednim wartościom prądu przyporządkowywać również pośrednie wartości stałej T .

6. WYŁĄCZANIE PRĄDÓW PRZECIĄŻENIOWYCH

Badania Baxtera [1], potwierdzone naszymi badaniami, wykazują, że w zakresie prądów przeciążeniowych o wyłączaniu prądu przez bezpiecznik decyduje energia E_z dostarczana przez źródło. Do prób w Zakładzie Elektrotechniki Morskiej IEI użyto krajowe bezpieczniki instalacyjne zwłoczne Bi Wto oraz szybkie Bi Wts na prądy znamionowe od 6 do 60 A. Warunki prób odpowiadały wymaganiom przepisów VDE 0635/3.53 (por. tablica 2), przy czym pomiary wykonano w obwodzie praktycznie bez-

indukcyjnym i z indukcyjnością 1 mH przy napięciu 550 V. Przy stosunkowo niewielkich prądach przeciążeniowych czasy łukowe wynoszą kilkanaście lub więcej milisekund. Wartość E_M , zależna od kwadratu prądu w chwili zapłonu łuku, jest w tych warunkach niewielka, a wartość E_z w porównaniu z E_M jest duża wobec długiego czasu łukowego.

Z przeglądu tablicy 2 wynika duże podobieństwo wymagań VDE 0635 i CEE dla bezpieczników instalacyjnych. Należy sprawdzać zdolność wyłączania przy kilku prądach przeciążeniowych, stanowiących określone krotności prądu znamionowego. Zwraca uwagę brak wymagań co do stałej czasowej obwodu T . Wynika to zapewne z przyjętego założenia, że energia E_M odgrywa tylko nieznaczną rolę w procesie wyłączania prądów przeciążeniowych.

Wymagania przepisów brytyjskich B. S. 88. wynikają z laboratoryjnych badań energetycznego maksimum, które występuje do 1,4-krotnego średniego prądu granicznego. Średni prąd graniczny jest tutaj rozumiany jako średnia arytmetyczna dolnego i górnego prądu probierczego. Stanowi to od około $2,5 I_n$ dla bezpieczników na mniejsze prądy znamionowe, do około $2 I_n$ dla bezpieczników na większe prądy znamionowe. Konieczność zachowania określonych stałych czasowych według wymagań brytyjskich wynika z tego, że występuje jednak pewien udział energii E_M w procesie wyłączania prądów przeciążeniowych. W czasie ograniczania prądu stosunkowo wolno wzrastającą opornością wydłużającego się łuku indukcyjność obwodu przedłuża czas łukowy. Warunki gaszenia łuku pogarszają się.

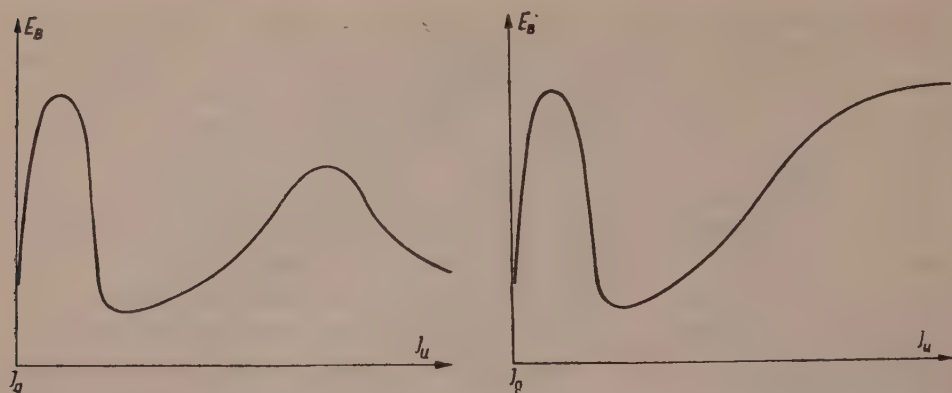
Wymagania przepisów VDE 0660 dla bezpieczników stacyjnych mogą się okazać dla niektórych odmian konstrukcyjnych zbyt łagodne, mianowicie wskutek większych trudności z gaszeniem łuku przy prądach mniejszych niż $6 I_n$.

7. ZESTAWIENIE WYNIKÓW ANALIZY

Na rysunki 3 przedstawiono charakter zależności energii wydzielonej w bezpieczniku w czasie łukowym od spodziewanego prądu zwarciovego I_u . Wykres *a* dotyczy przypadku, gdy przy zmianach prądu I_u stała czasowa $T = \text{const}$; a wykres *b* dotyczy przypadku, gdy przy zmianach prądu I_u indukcyjność $L = \text{const}$.

W pierwszym przypadku występują dwa maksima przebiegu — jeden w zakresie prądów zwarciovych, około $i_0/I_u \approx 0,6$, a drugi w zakresie prądów przeciążeniowych.

W drugim przypadku maksimum występuje w zakresie prądów przeciążeniowych, a przy $I_u \rightarrow \infty$ energia rośnie nieustannie.



Rys. 3. Charakter zależności energii E_B wydzielonej w bezpieczniku od spodziewanego prądu zwarcowego I_u (I_g — prąd graniczny).

a — przy $T = \text{const}$, b — przy $L = \text{const}$.

8. WNIOSKI

Wprowadzenie wskaźnika prądu ograniczonego bezpiecznika z pozwala na zbudowanie uniwersalnej charakterystyki prądu ograniczonego oraz na znalezienie wartości maksymalnych energii $E_M = \frac{Li_0^2}{2}$.

Rozmaitość i niezgodność używanych w kraju przepisów i norm dla prób zdolności wyłączania bezpieczników prowadzi do zasadniczych różnic między ocenami konstrukcji bezpieczników. W oparciu o analizę teoretyczną i o wyniki prób można zalecić najwłaściwsze warunki prób zdolności wyłączania bezpieczników.

W zakresie prądów zwarcowych obwody probiercze dla bezpieczników instalacyjnych i bezpieczników stacyjnych powinny odpowiadać przepisom B. S. 88. Jeżeli żąda się spełnienia wymagań najostrzejszych, to należy przyjąć obwody probiercze przewidziane dla wielkości W4.

W zakresie prądów przeciążeniowych obwody probiercze dla bezpieczników instalacyjnych i bezpieczników stacyjnych powinny odpowiadać wymaganiom VDE 0635 lub CEE.

Bezpieczniki odpowiadające tym wymaganiom będą przydatne do wszystkich zastosowań.

Konieczne są dalsze dokładniejsze studia nad zależnością między spodziewanym prądem zwarcowym a stałą czasową obwodu zwarcowego w sieciach prądu stałego. Uzyskanie tych informacji umożliwi sprecyzowanie słuszniejszych wymagań dla prób zdolności wyłączania prądów zwarcowych i prądów przeciążeniowych.

WYKAZ LITERATURY

1. Baxter H. W.: *Electric fuses*. London. 1950.
2. Kuzniecowa R. S.: *Apparaty rozpredielitelnych ustrojstw nizkowo napriazeniya*. G. E. I. 1956.
3. Liempt J. A. M., Vriend J. A.: *Die Schmelzzeit von Schmelzsicherungen II*. Z. Phys., 1935, 133—140.
4. Meier F.: *Einfluss von Schaltmoment und Phasenverschiebung auf die Beanspruchung von Sicherungen bei Kurzschlussabschaltungen*. Bulletin S. E. V., Nr 3, 1955 ss. 101—108.
5. Rauch W.: *Kurzschlussstrom-Begrenzung bei Gleichstromabschaltung durch Schmelzeinsätze*. Siemens-Zeitschrift, Nr 9, 1958, ss. 674—678.
5. Rauch W.: *Kurzschlussstrom-Begrenzung bei Gleichstromabschaltung durch Wkładki topikowe o działaniu zwłocznym do 60 A, 500 V*. Grudzień 1954 r. oraz Norma Resortowa RN-MPM-18013. Przybory instalacyjne na napięcie do 500 V. Wkładki topikowe o działaniu szybkim do 200 A, 500 V. Grudzień 1954.
7. Przepisy VDE 0635/3.53. *Vorschriften für Leitungsschutzsicherungen mit geschlossenen Schmelzeinsatz 500 und 750 V bis 200 A*.
8. Przepisy CEE. (International Commission on Rules for the Approval of Electrical Equipment). *Specification for Fuses for Domestic and Similar Purposes*. Publication 16. October 1955.
9. Przepisy VDE 0660/12.52. *Regeln für Schaltgeräte bis 1000 V Wechselspannung und 3000 V Gleichspannung*.
10. Przepisy B. S. 88:1952. *Electric Fuses for Circuits Voltage Ratings up to 660 Volts*.
11. Dokument 18(Italy) 417, marzec 1959, IEC, Appendix.

КРИТЕРИЙ ИСПРАВНОГО ДЕЙСТВИЯ ПРЕДОХРАНИТЕЛЕЙ ПРИ ПОСТОЯННОМ ТОКЕ

В работе рассматривается критерий исправного действия предохранителей низкого напряжения в контурах постоянного тока при отключении токов короткого замыкания и перегрузочных токов. Вводится показатель токоограничения предохранителя, дающий возможность построить универсальную характеристику токоограничения для любого предохранителя действующего в контуре при любом токе короткого замыкания и при любой постоянной времени.

Далее рассмотрены энергетические условия сопровождающие процесс выключения токов короткого замыкания в произвольных испытательных контурах при $T = \text{const}$ и $L = \text{const}$ для любого предохранителя. Оказывается, что при $T = \text{const}$ энергетический максимум выступает при соотношении ограниченного тока к току короткого замыкания равному около 0,6. При $L = \text{const}$ энергия дуги растет безудержно при возрастании значения тока короткого замыкания.

Затем ведется анализ требований правил и норм при использовании приведенной дискуссии по энергетическим условиям в дуге. Определены конечные параметры испытательных контуров, которые сравнены с параметрами эксплуатационных контуров. Установлено, что требования английских нормативов наиболее соответствуют условиям выступающим в эксплуатационных контурах.

Разбираются энергетические условия сопутствующие прерыванию перегрузочных токов.

В заключение приведены кривые иллюстрирующие характер изменений энергетических условий в предохранителе при выключении токов во всем диапазоне от перегрузочных до токов короткого замыкания при $T=\text{const}$ и $L=\text{const}$.

CORRECTNESS CRITERIA OF FUSES OPERATING IN DIRECT CURRENT CIRCUITS

The paper deals with the correctness criteria of low-voltage fuses operation in direct current circuits by breaking of short-circuit and overload currents. Introduction of the factor of cut-off current enabled to find out its universal characteristic. This characteristic permits to define cut-off current for arbitrary fuse operating in a circuit of arbitrary prospective short-circuit current with arbitrary time constant. Energetic conditions assisting in short-circuit currents breaking of arbitrary chosen test circuits with $T=\text{const}$ and $L=\text{const}$ for arbitrary fuse are then discussed. Energetic maximum at $T=\text{const}$ arises by the ratio of cut-off current and prospective current equal to 0,6 approximately.

Fuse arc energy at $L=\text{const}$ rises incessantly with increasing prospective current. On the ground of derived energetic conditions an analysis of requirements laid down for respective norms and rules has been carried out. The demanded parameters for the test circuits are determined and compared with those of some exploitation circuits. It has been discovered that the requirements of British Standards are closely related to the conditions of exploitation circuits. Energetic conditions assisting in overload current breaking are discussed. Analysis results are collected in diagrams.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI
POLSKIEJ AKADEMII NAUK
ZAKŁAD ELEKTRONIKIKomunikaty z prac
Zakładu Elektroniki przy współpracy z Katedrą Podstaw Telekomunikacji
Politechniki Warszawskiej

621.382.122.3:669.783

A. STANO

GERMANOWE DIODY TUNELOWE

Rękopis dostarczono 21. 10. 1960

Praca zawiera opis metody otrzymywania zdegenerowanego germanu typu N, domieszkowanego fosforem, oraz wyniki pierwszych prób wykonania z niego diod tunelowych.

ГЕРМАНИЕВЫЕ ТУННЕЛЬНЫЕ ДИОДЫ

В статье приведено описание метода получения вырожденного германия типа n с содержанием примеси фосфора и результатов первых попыток изготовления из него туннельных диодов.

GERMANIUM TUNNEL DIODES

The paper is concerned with description of production method of degenerate N-type germanium doped with phosphorus. Account of initial experiments to employ it for production of tunnel diodes is given.

1. WSTĘP

W 1958 r. L. Esaki [1] przedstawił nowy rodzaj złącza P-N o charakterystyce ujemnego oporu w kierunku przewodzenia. Ujemny opór wywołany jest zjawiskiem tunelowania nośników prądowych przez barierę potencjału na złączu. Stąd nazwa elementu — dioda tunelowa. Wykorzystanie zjawiska tunelowania, a nie zjawiska dyfuzji nośników, pozwala na osiągnięcie bardzo wielkich częstotliwości granicznych rzędu kMc. Diody tunelowe znajdują szerokie zastosowanie w obwodach wzmacniających w. cz., oscylacyjnych, przełącznikowych. [2].

W Zakładzie Elektroniki I.P.P.T. PAN rozpoczęto prace nad wyprodukowaniem takiego elementu. Wykonanie tunelowego złącza P^+-N^+ wymagało uprzednio wytworzenia zdegenerowanego kryształu półprzewodnikowego np. zdegenerowanego kryształu germanu, tj. kry-

ształu o bardzo niskiej oporności odpowiadającej koncentracji domieszek rzędu 10^{19} at/cm³. Pracę ograniczono do germanu typu N.

2. OTRZYMYWANIE
ZDEGENEROWANEGO MONOKRY-
SZTAŁU GERMANU TYPU N

Żądany materiał można uzyskać przez domieszkowanie germanu fosforem. Trudność technologiczną stanowi jednak bardzo wysokie ciśnienie par fosforu w temperaturach bliskich temperatury topnienia germanu.

Zastosowano metodę złożoną z dwóch etapów.

W pierwszym etapie wykonuje się stop pośredni germanu z fosforem. Użykuje się go przez wdyfundowanie par fosforu, o niezbyt wysokim ciśnieniu, do ciekłego germanu. W tym celu, w zamkniętej rurce próżniowej umieszcza się

german i fosfor w osobnych łódeczkach, objętych podczas grzania strefami o różnych temperaturach. Ilość oraz temperaturę fosforu odpowiednio się dobiera.

W drugim etapie procesu z uzyskanego stopu pośredniego wyciąga się w stanowisku próżniowym monokryształ metodą Czochralskiego¹. Podczas tego procesu pewna część fosforu odparowuje z germanu.

Tą metodą uzyskano dotąd w Zakładzie Elektroniki monokryształ germanu o oporności $1 \cdot 10^{-3} \Omega \text{ cm}$. Wydaje się jednak, że w toku dalszych prac uda się osiągnąć oporności poniżej $10^{-3} \Omega \text{ cm}$.

3. PIERWSZE DIODY TUNELOWE OTRZYMANE W KRAJU

Do produkcji diod tunelowych używa się monokryształy germanu o oporności $5 \cdot 10^{-4} \div 1 \cdot 10^{-3} \Omega \text{ cm}$. Najczęściej stosuje się oporności $9 \cdot 10^{-4} \Omega \text{ cm}$.

Pierwszą serię diod tunelowych w Zakładzie Elektroniki wykonano jednak, z braku w tym czasie odpowiedniego materiału, na polikryształe germanu (o dużych ziarnach) o oporności $2 \cdot 10^{-3} \Omega \text{ cm}$. Wykonano je przez wtopienie do płytki germanowej stopu In Ga (0,8% Ga) i uzyskano następujące wyniki:

$$I_{\max} \quad 3 \text{ mA}$$

$$I_{\max}/I_{\min} \quad 4$$

$$U_{I \max} \quad 40 \text{ mV}$$

$$U_{I \min} \quad 180 \text{ mV}$$

¹ Wykonane przez mgr inż. Elżbietę Janik.
621.382.111.1:536.531

B. SCHMIDT, C. i E. KUŻMA

PODWÓJNY CZUJNIK TERMISTOROWY ZE12

Rękopis dostarczono 9. 12. 1960

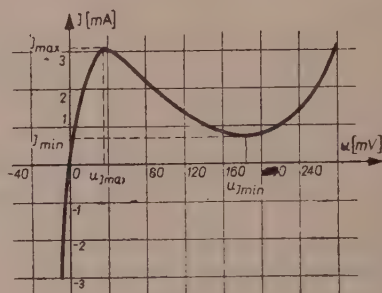
Omówiono nowy typ czujnika termistorowego i podano przesłanki jego powstania.

ДВОЙНОЙ ТЕРМИСТОРНЫЙ ИНДИКАТОР

Разработана модель двойного термисторного индикатора ZE 12. Этот индикатор (рис. 2) предназначен прежде всего для измерений температур жидкостей газов и сыпучих тел. Благодаря малым габаритам термисторных элементов

Charakterystykę jednej z diod przedstawia rys. 1.

Dalsze próby są w toku przygotowań. Po zastosowaniu lepszego materiału



Rys. 1

i udoskonaleniu technologii należy się spodziewać znacznej poprawy parametrów, które i tak już świadczyły o silnym efekcie tunelowym.

4. ZAKOŃCZENIE

W zakończeniu autorka pragnie wyrazić podziękowanie mgrowi Miłoszowi Chmielewskiemu za liczne dyskusje oraz udostępnienie swojej jeszcze nie publikowanej pracy pt. „Własności elektryczne zdegenerowanego złącza P-N”.

LITERATURA

1. Esaki L.: *New phenomenon in narrow Ge P-N "junctions"*, Phys. Rev., 1958, Vol. 109, str. 603.
2. Roberts G. N.: *Tunnel diodes*, Electronic Technology, 1960, Vol. 37, Nr 6, str. 217.

и возможности их близкого взаимного расположения двойной термисторный индикатор можно рассматривать как одиночный „точечный индикатор.

Электрические и термические данные индикатора:

Сопротивление при температуре 25°C $R_{25} = 8 \div 50 \text{ k}\Omega$

Разброс значения сопротивления элементов индикатора $\frac{\Delta R}{R} = \pm 10\%$

Температурный коэффициент сопротивления $\alpha_{25} = -4,4\%/^{\circ}\text{C}$

Коэффициент рассеяния $K = 0,6/^{\circ}\text{C}$

Постоянная времени $\tau = 4 \text{ сек.}$

Типичной измерительной применяемой с двойным термисторным индикатором является система неуравновешенного моста Уитстона. Эта система по сравнению с классической мостовой системой отличается рядом преимуществ. Основными из них являются в несколько раз меньшая нагрузка индикатора и увеличенная чувствительность по току.

DOUBLE-THERMISTOR FEELER ZE12

A model of double-thermistor feeler ZE12 primarily intended for temperature measurements of liquids, gases and dry substances has been devised. Due to small dimensions of its thermistor components and their mutual proximity double-thermistor feeler may be considered as a single „pointer” feeler.

Some electric and thermal data of feeler:

Resistance in temperature of 25°C $R_{25} = 8 - 50 \text{ k}\Omega$

Scattering of resistance of feeler components $\frac{\Delta R}{R} = \pm 10\%$

Temperature coefficient of resistivity $\alpha_{25} = -4,4\%/^{\circ}\text{C}$

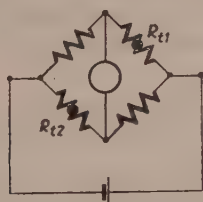
Dissipation constant $k = 0,6 \text{ mW}/^{\circ}\text{C}$

Thermal time constant $\tau = 4 \text{ sec.}$

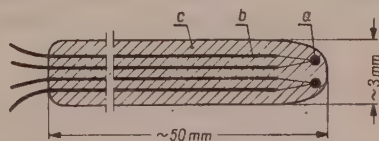
Circuit of unbalanced Wheatstone bridge is a typical measurement system implemented in double-thermistor feeler. If compared with conventional bridge comprising a single feeler it displays a number of valuable properties: among them much smaller feeler loading and higher current sensitivity being the paramount.

Układ niezrównoważonego mostka Wheatstone'a z dwoma czujnikami pomiarowymi umieszczonymi w przeciw-

Najważniejszymi z nich są kilkakrotnie mniejsze obciążenie czujnika oraz większa czułość prądowa układu.



Rys. 1. Układ mostka Wheatstone'a z podwójnym czujnikiem termistorowym.



Rys. 2. Podwójny czujnik termistorowy ZE12.

a — perły termistorowe, b — odprowadzenia, c — bagietka szklana.

ległych sobie gałęziach (rys. 1) w porównaniu z klasycznym układem z jednym czujnikiem wykazuje szereg zalet.

Powyższe zalety były przyczyną opracowania modelu podwójnego czujnika termistorowego ZE12 (rys. 2). Czujnik

składa się z dwóch miniaturowych pereł termistorowych ZE5 umieszczonych możliwie blisko siebie na końcu bagietki szklanej i pokrytych cienką warstwą szkła. Platyno-irydowe końcówki perełek są przyspawane odpowiednio do czterech odprowadzeń wykonanych z przewodu miedzio- płaszczonego.

Czujnik ZE12 przeznaczony jest przede wszystkim dla pomiaru temperatury cieczy, gazów i ciał sypkich. Dzięki małym wymiarom elementów termistorowych i ich wzajemnie bliskim położeniu po-

dwójny czujnik można traktować tak, jak pojedynczy czujnik „punktowy”.

Dane elektryczne i cieplne czujnika ZE12 są zbliżone do danych pojedynczego czujnika ZE3.

Oporność w temperaturze

25°C $R_{25} = 8 \div 50 \text{ k}\Omega$

Rozrzut oporności elementów czujnika $\frac{\Delta R}{R} = \pm 10\%$

Współczynnik temperatury oporności $\alpha_{25} = -4,4\%/^{\circ}\text{C}$

Współczynnik strat $K = 0,6 \text{ mW}/^{\circ}\text{C}$

Stała czasowa $\tau = 4 \text{ sek}$

621.382.111.1

B. SCHMIDT, C. KUŻMA

AUTOMATYCZNE ZDEJMOWANIE CHARAKTERYSTYK STATYCZNYCH NAPIĘCIOWO-PRĄDOWYCH TERMISTORA

Rękopis dostarczono 9. 12. 1960

Omówiono zasadę działania i pewne rozwiązanie techniczne charakterografu termistorowego.

АВТОМАТИЧЕСКОЕ СНЯТИЕ ВОЛЬТАМПЕРНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ТЕРМИСТОРА

Описанное устройство предназначено для автоматического снятия статической вольтамперной характеристики термистора. Принцип действия устройства следующий:

Термистор питается из источника Z медленно и приближенно линейно изменяющимся током. Падения напряжения на сопротивлении термистора R_t и постоянного реостата R управляют прибором регистрирующим показания в прямоугольной системе координат. Его отклонение пропорционально значению приложенных напряжений. В результате получается характеристика $U=f(I)$

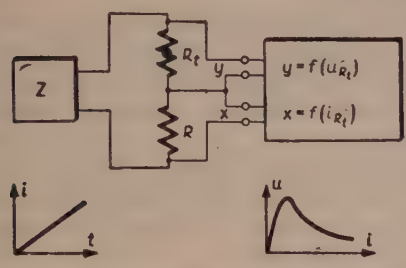
На рис. 2 приведена упрощенная электрическая схема устройства, а на рис. 3 — фотография полученной характеристики термистора типа ZE7.

AUTO-RECORDING OF STATIC VOLTAGE-CURRENT CHARACTERISTICS OF THERMISTOR

A device automatically recording the static voltage-current characteristics of thermistor is described. Operation principle of the system is as follows: a supply unit Z (Fig. 1) feeds thermistor with the current of sufficiently slowly and almost linearly varying intensity. Voltage drop in thermistor R_t and constant resistor R commands the indicator recording in rectangular coordinate system, whose deviations, thus, are proportional to the magnitude of applied voltage. In consequence a characteristic $U=f(I)$ is recorded. A simplified electric circuit of device represents Fig. 2, whilst a photograph of a recorded characteristic of thermistor ZE7 type is shown in Fig 3.

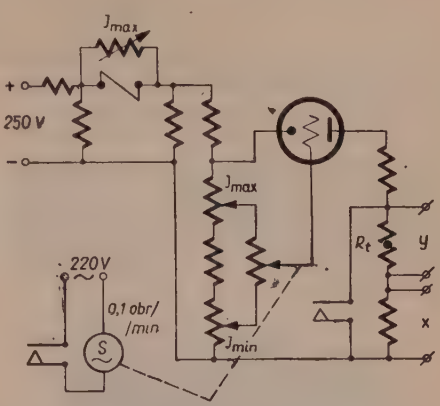
Wykonane urządzenie służy do automatycznego zdejmowania charakterystyk statycznych napięciowo-prądowych termistora. W zależności od rodzaju użytego przyrządu rejestrującego przebieg charakterystyki może być utrwalony na kliszy fotograficznej, ewentualnie zapisany na papierze.

Schemat blokowy urządzenia przedstawiono na rys. 1. Zasilacz Z dostarcza



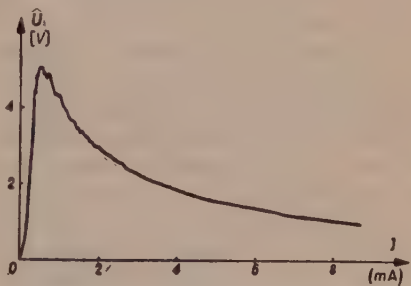
Rys. 1. Schemat blokowy charakterografu termistorowego.

do termistora prądu o natężeniu zmieniającym się w czasie dostatecznie wolno i w przybliżeniu liniowo. Spadki napięcia na termistorze R_t i stałym oporniku R sterują przyrząd rejestrujący w prostokątnym układzie współrzędnych (oscyloskop lub specjalny układ galwanometrów), którego wychylenie jest wprost proporcjonalne do wartości przyłożonych napięć. W rezultacie otrzymuje się przebieg zależności spadku napięcia na termistorze od prądu przezeń płynącego, czyli charakterystykę $U=f(I)$.



Rys. 2. Uproszczony schemat elektryczny charakterografu.

Na rys. 2 przedstawiono uproszczony układ elektryczny urządzenia, na rys. 3 zaś — fotografię zdjętej charakterystyki termistora typu ZE7.



Rys. 3. Fotografia otrzymanego przebiegu charakterystyki $U=f(I)$ Termistor ZE7. Urządzenie rejestrujące typu KS5—5 f-my VEB.

Z. KRZYCKI

SZEROKOPASMOWY IZOLATOR FERRYTOWY NA PASMO 3 CM

Rękopis dostarczono 23. 11. 1960

Omówiono wykonany przez autora szerokopasmowy izolator ferrytowy wykorzystujący zjawisko przemieszczenia pola. Podano uzyskane właściwości izolatora i parametry użytego w nim ferrytu.

ШИРОКОПОЛОСНОЙ ФЕРРИТОВЫЙ ИЗОЛЯТОР
НА ТРЕХСЕНТИМЕТРОВУЮ ПОЛОСУ

Обсужден изготовленный автором широкополосный ферритовый изолятор использующий явление перемещения поля. Приведены полученные свойства изолятора и параметры феррита использованного при его изготовлении.

FERRITE WIDEBAND ISOLATOR FOR 3 CM BAND

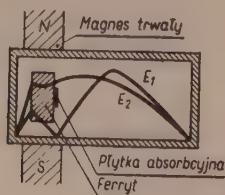
The author deals with ferrite wideband isolator exploiting the phenomenon of field displacement. The acquired isolator properties and the parameters of the applied ferrite are given.

W Pracowni Materiałów Magnetycznych IPPT PAN został opracowany, na materiałach krajowych, szerokopasmowy izolator ferrytowy typ IXL-1 na pasmo 3 cm. Pokazany jest on na rys. 1.



Rys. 1. Widok izolatora.

Zasada pracy tego izolatora opiera się na zjawisku przemieszczenia pola w falowodzie, powodowanym przez podmagnesowaną płytkę ferrytową [1]. Ilustrację jej stanowi rys. 2, na którym pokazany jest uproszczony przekrój poprzeczny izolatora i rozkład pola elektrycznego dla rodzaju podstawowego H_{10} . Linia E_1 przedstawia rozkład pola elektrycznego fali bieżącej (rozchodzącej

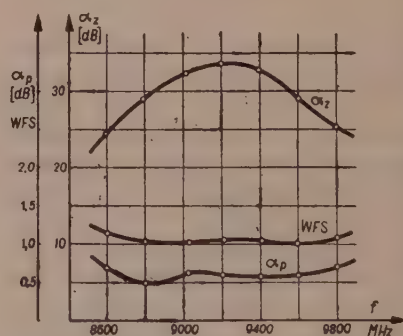


Rys. 2. Uproszczony przekrój izolatora.

się w kierunku od generatora do obciążenia), zaś E_2 — rozkład pola fali powracającej (w kierunku od obciążenia do generatora). W płaszczyźnie, w której znajduje się płytkę absorbcyjną fala bieżąca ma zerowe pole elektryczne

i wobec tego rozchodzi się bez tłumienia, natomiast pole elektryczne fali powracającej ma wartość zbliżoną do maksymalnej i jest wytłumiane w płytce absorbcyjnej.

Położenie płytki ferrytowej w falowodzie, jej gabaryt i kształt oraz płytkę absorbcyjną, zapewniające optymalne parametry izolatora dobrane zostały eksperymentalnie. Na rys. 3 pokazane są przebiegi jego tłumień: zaporowego i przepustowego oraz współczynnika fali stojącej (od strony wejściowej) w funkcji częstotliwości.



Rys. 3. Charakterystyki częstotliwościowe izolatora: α_z — tłumienie zaporowe, α_p — tłumienie przepustowe.

Dane techniczne izolatora typu IXL-1 są następujące:

częstotliwość	8600 ÷ 9800 MHz
min. tłumienie przepustowe	0,5 dB
max. tłumienie przepustowe	0,7 dB
max. tłumienie zaporowe	35 dB
min. tłumienie zaporowe	25 dB
WFS (z obu stron)	< 1,15
dopuszczalna moc średnia	5 W

dopuszczalna moc

w impulsie 1 kW

falowód 1" x 0,5"

długość 80 mm

ciężar 0,8 kG

Przy zachowaniu przedstawionego tu stosunku tłumień zaporowego do przepustowego, uzyskanie parametrów różniących się od wyżej podanych w zależności od potrzeb, nie nastręcza trudności.

Izolator wykonany został na ferry-cie niklowo-kadmowym, opracowanym w Pracowni Materiałów Magnetycznych IPPT PAN, mającym następujące parametry [2]:

magnetyzacja nasycenia 4900 Gs

szerokość linii rezonansowej

w paśmie 3 cm 140 Oe

spektroskopowy współczynnik

rozszczepienia 2,09

temperatura Curie 300°C

Izolator typu IXL-1 przeznaczony jest w zasadzie do pracy w układach pomiarowych małej mocy. Ze względu jednak na zastosowany ferryt o wysokiej temperaturze Curie przypuszcza się, że dopuszczalna moc może być znacznie przekroczona bez zmiany właściwości i szkody dla izolatora.

LITERATURA

1. Weisbaum S., Seidel H.: *A field displacement isolator* Bell System Technical Journal 1956 Nr 4 str. 877—898.
2. Wadas R.: *Ferromagnetic resonance in polycrystalline nickel-copper-zinc ferrites* Bull. Acad. Sci. Sér. techn. Vol. VIII No 5 (1960).

Z. KRZYCKI

UKŁAD DO POMIARU LINII REZONANSOWEJ FERRYTÓW
W FALOWODZIE Z PRZESŁONĄ

Rękopis dostarczono 23. 11. 1960

Uzasadniono możliwość pomiaru szerokości linii rezonansowej i efektywnego spektroskopowego współczynnika rozszczepienia ferrytów w falowodzie z przesłoną i podano wyniki pomiarów.

УСТАНОВКА ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ РЕЗОНАНСНОЙ ЛИНИИ ФЕРРИТОВ
В ВОЛНОВОДЕ С ДИАФРАГМОЙ

Обоснована возможность измерения ширины резонансной линии и эффективного спектроскопического коэффициента расщепления ферритов в волноводe с диафрагмой и приведены результаты таких измерений.

SETUP FOR MEASURING RESONANT LINE OF FERRITES IN WAVEGUIDE
WITH DIAPHRAGM

The feasibility of measurement the resonant line width and the effective spectroscopic splitting factor of ferrites in waveguide is proved and the measurement results are given.

1. WSTĘP

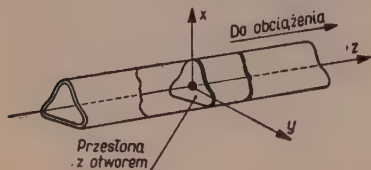
Przy określaniu magnetycznych właściwości ferrytów jednym z podstawowych parametrów jest szerokość linii rezonansowej. Pomiar tej wielkości me-

todą opisaną w niniejszym artykule jest niezwykle prosty. Układ pomiarowy zestawia się z typowych elementów, w stosunku do których nie ma żadnych

specjalnych wymagań. Składa się on z generatora, dokładnego tłumika, odcińka falowodowego z przesłoną i układu detekcyjnego. Krótkie uzasadnienie metody i wyniki niektórych pomiarów podane są w dalszej części artykułu.

2. WYZNACZENIE SPRĘŻENIA

Rozpatrzone zostanie sprzężenie między dwoma falowodami połączonymi przez wspólną przesłonę, mającą centralnie położony, mały, okrągły otwór, wypełniony ferrytem rys. 1. Ferryt magnesowany jest stałym polem magne-



Rys. 1. Falowód z przesłoną z zaznaczeniem przyjętego układu osi.

tycznym wzdłuż osi x . Rozważania przeprowadzone będą w składzie MKSA dla stanu ustalonego, dla harmonicznej zależności od czasu kształtu $e^{-j\omega t}$. Stosowany będzie zapis rachunku symbolicznego. Zagadnienie to zostanie rozwiązane w podobny sposób jak zrobił to Stinson [5] dla sprzęgaczy.

Korzystając z ogólnej teorii dyfrakcji na małych otworach, podanej przez Bethego [1], sprzęgające właściwości otworu wypełnionego ferrytem zostaną zastąpione parą równoważnych, promieniujących dipoli — magnetycznego Π i elektrycznego Φ .

$$\mu_0 \vec{\Pi} = \mathcal{M}_1 \hat{B}_{0x} \vec{i}_x + \mathcal{M}_2 \hat{B}_{0y} \vec{i}_y, \quad (1a)$$

$$\vec{\Phi} = \mathcal{P} \vec{D}_0 \cdot \vec{i}_z, \quad (1b)$$

przy czym przyjęto

$$\vec{B}_0 = \mu_0 (\vec{H}_0 + \vec{M}) = \mu_0 (\tilde{\mu}) \cdot \vec{H}_0$$

oraz

$$\vec{D}_0 = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}_0$$

$$\vec{i}_x, \vec{i}_y, \vec{i}_z$$

— wersory osi x, y, z .

H_0, E_0 — natężenia pola magnetycznego albo elektrycznego, które istniałyby w środku otworu, gdyby otworu w ścianie nie było.

Jak wiadomo tensor zewnętrznej przenikalności magnetycznej ($\tilde{\mu}$) dla próbki magnesowanej w kierunku x ma kształt

$$(\tilde{\mu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\mu} - j\tilde{k} & \\ 0 & j\tilde{k} & \tilde{\mu} \end{pmatrix}.$$

Dla małego, okrągłego otworu o średnicy d jest [1]

$$\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_2 = \mathcal{M} = \frac{d^3}{6} \quad \text{oraz} \quad \mathcal{P} = \frac{d^3}{12}$$

Zakładamy następującą postać składowych poprzecznych pola magnetycznego H_{2z} w falowodzie wtórnym, wzbudzonego przez pole H_{1z} istniejące w falowodzie pierwotnym

$$\hat{H}_{2z} = \sum_n \hat{A}_n \cdot \hat{E}_{n1z} e^{-j\beta_n z}, \quad (2)$$

gdzie

\hat{A}_n — zespolony współczynnik proporcjonalności, określający sprzężenie przez otwór fali dowolnego rodzaju n .

Mamy wtedy następujący związek dla pól w płaszczyźnie przesłony, fal o jednostkowych amplitudach, własnych n -tych rodzajów obu falowodów

$$\hat{A}_n = j \frac{\omega}{4P_{n1}} (\mathcal{M} \hat{B}_{n1x} \cdot \hat{H}_{n2x}^* + \mathcal{M} \hat{B}_{n1y} \cdot \hat{H}_{n2y}^* + \mathcal{P} \hat{D}_{n1z} \cdot \hat{E}_{n2z}^*), \quad (3)$$

Wielkość \hat{P}_{n1} określona zależnością

$$\hat{P}_{n1} = \int_S (\vec{E}_{n1} \cdot \vec{H}_{n1}^*) \cdot \vec{i}_z ds$$

jest zespoloną mocą jednostkowej fali n -tego rodzaju w falowodzie pierwotnym.

W dalszej części rozpatrzone będzie sprzężenie dwu jednakowych falowodów prostokątnych o bokach a i b , pracujących w rodzaju podstawowym H_{10} . Pominiemy indeks n .

Korzystając ze znanych rozkładów pól w falowodzie zwartym (z pominięciem zmiany rozkładu powodowanej przez otwór) oraz uwzględniając [4] skończoną grubość przesłony t_0 wyrażenie (3) uprości się do postaci

$$\hat{A} = j \frac{\omega}{4P_1} \Re \hat{B}_{1y} \cdot \hat{H}_{2y}^* \cdot F_H, \quad (4)$$

gdzie [4]

$$F_H = e^{-2\pi \sqrt{\frac{1}{(1.71d)^2} - \frac{1}{\lambda_0^2}} t_0},$$

λ_0 — długość fali w swobodnej przestrzeni.

Uwzględniając, że $\hat{P}_1 = ab \cdot z_f \cdot H_0^2$
 z_f — impedancja falowa falowodu
 H_0 — amplituda pola jednostkowej fali bieżącej
 wyrażenie (4) przybiera postać

$$\hat{A} = j \frac{\omega}{abz_f} \Re \frac{\hat{B}_{1y} \hat{H}_{2y}^*}{H_0^2} F_H. \quad (5)$$

Wyróżnia się dwa przypadki połączenia falowodów:

1. szersze ścianki położone są w jednej płaszczyźnie,
 2. falowody skręcone są o 90° .
- Dla przypadku 1. jest

$$\hat{A}_= = j \frac{\pi d^3}{3ab\lambda_f} F_H \cdot \tilde{\mu} \quad (6)$$

λ_f — długość fali w falowodzie,

$\tilde{\mu}$ — współczynnik z przekątnej głównej tensora zewnętrznej przenikalności magnetycznej,

a dla przypadku 2.

$$\hat{A}_\perp = \frac{\pi d^3}{3ab\lambda_f} F_H \cdot \tilde{k} \quad (7)$$

\tilde{k} — współczynnik z przekątnej bocznej tensora zewnętrznej przenikalności magnetycznej.

Sprężenie przez otwór w przesłonie zdefiniujemy jako stosunek mocy P_2 wzbudzonej w falowodzie wtórnym do mocy P_1 fali padającej na przesłonę.

Podstawiając do (6) znane związki

$$P_1 = \frac{ab}{4} z_f \cdot H_0^2 \quad \text{oraz} \quad P_2 = \frac{ab}{4} z_f (\hat{A} \cdot 2H_0)^2$$

i wyrażając sprzężenie C w decybelach otrzymujemy

$$C_0 = 20 \log \frac{2\pi d^3}{3ab\lambda_f} F_H \cdot |\tilde{\mu}|. \quad (8)$$

Oznaczając

$$C_0 = 20 \log \frac{2\pi d^3}{3ab\lambda_f} F_H \quad (9)$$

napiszemy ostatecznie

$$C_0 = C_0 + 20 \log |\tilde{\mu}|. \quad (10)$$

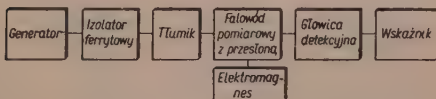
Podobnie otrzymuje się

$$C_\perp = C_0 + 20 \log |\tilde{k}|. \quad (11)$$

Widać więc, że sprzężenie falowodów połączonych zgodnie jest proporcjonalne do $|\tilde{\mu}|$ zaś skróconych o 90° — do $|\tilde{k}|$. Wynika stąd możliwość pomiaru linii rezonansowej ferrytów. W szczególności wygodnie jest mierzyć szerokość linii rezonansowej ΔH , którą definiuje się jako szerokość przedziału zmian stałego pola magnetycznego, na krańcach którego $|\tilde{k}|$ lub $|\tilde{\mu}|$ osiągają wartości $\sqrt{2}$ -krotnie mniejsze w stosunku do swoich rezonansowych [2]. Bardzo łatwo mierzy się także efektywny spektroskopowy współczynnik rozszczepienia g_{ef} . Określa się go ze znanej zależności $g_{ef} = \frac{f}{1.4H_r}$, gdzie f jest częstotliwością pomiarową wyrażoną w MHz, zaś H_r — natężeniem pola magnetycznego, wyrażonego w Oe, przy którym występuje rezonans.

3. WYNIKI POMIARÓW

Blokowy schemat układu pomiarowego pokazano na rys. 2. Pomiar szerokości linii rezonansowej ΔH wykonuje się na próbkach kulkowych o średnicy znacznie mniejszej od średnicy otworu w przesłonie. Okazuje się [3], że kształt



Rys. 2. Blokowy schemat układu pomiarowego.

zależności (11), określającej sprzężenie przez otwór całkowicie wypełniony ferrytem, pozostaje bez zmian. Pomiar wykonuje się w układzie falowodów skręconych o 90° (rys. 3, kiedy sprzężenie w funkcji stałego pola magnetycznego ma identyczny przebieg jak $|k|$. W układzie falowodów połączonych zgodnie przebieg sprzężenia nie pokrywa się z przebiegiem $|\tilde{u}|$. Jest on wynikiem jednoczesnego sprzężenia przez ferryt i przez pustą część otworu. Wyniki po-

miarów ΔH w obu układach różnią się znacznie. Jedynie ważne są pomiary w układzie falowodów skręconych o 90° . Wyniki ich przedstawiono w tablicy 1. Oprócz wyników pomiarów w przesłonie zamieszczono dla porównania rezultaty pomiarów wykonanych przez autora w sprzęgaczu krzyżowym [2]



Rys. 3. Widok falowodu pomiarowego.

oraz wyniki otrzymane z pomiarów metodami rezonatorowymi, wykonane w Heinrich-Hertz Institut w Berlinie i w Institut für Magnetische Werkstoffe w Jenie. W tablicy 1 podano także wyniki pomiarów efektywnego współczynnika rozszczepienia. Wszystkie próbki wykonane były z ferrytów opracowanych w IPPT — PAN [6].

Tablica 1

Ferryt	Średn. próbki mm	przesłona		sprzęgacz		rezonator		
		H Oe	g_{ef}	H Oe	g_{ef}	H Oe	g_{ef}	miejsce pomiaru
Z-1	0,6	80	2,065	77	2,043	88 76	2,07 2,066	Berlin Jena
Z-0	0,6	110	2,08	110	2,085	—	—	—
N-1	0,8	205	2,22	207	2,21	188	2,23	Jena

Pomiary wykonane były na próbkach kulkowych na częstotliwości 9300 MHz.

Przesłona o grubości $t_0 = 1$ mm z otworem o średnicy $d = 3,7$ mm umieszczona była w falowodzie o wymiarach $a = 22,7$ mm, $b = 10,2$ mm. W tych warunkach $C_0 = -44,1$ dB.

Dla uniknięcia wpływu charakterystyki detektora stosowany był tłumik,

którym tłumiąc o 3 dB moc w detektorze odpowiadającą rezonansowi, ustalono poziom, na którym określa się szerokość linii ΔH .

Trzeba również dodać, że opisaną metodą wykonuje się bardzo wygodnie pomiary w funkcji kąta. Do tego celu wykonano dodatkowe otwory na obwodzie przesłony rys. 3.

Autor pragnie podziękować prof.

drowi inż. A. Smolińskiemu za stałą życzliwą opiekę i cenne uwagi przy wykonywaniu tej pracy.

LITERATURA

1. Bethe H. A.: *Theory of diffraction by small holes* Phys. Rev. Vol. 66 No 7—8 October 1944 str. 163—182.
2. Krzycki Z.: Układ do pomiaru szerokości linii rezonansowej ferrytów w pasmie X. Zeszyty Problemowe Nauki Polskiej Nr 20 1960.
3. Krzycki Z.: *Sprzęgacz krzyżowy z otworem zapelnionym ferrytem*. Rozpr. Elektrot. w druku.
4. Montgomery D. C.: *Technique of microwave measurements* Mc Graw-Hill Book Co 1948 s. 862.
5. Stinson D. C.: *Coupling through an aperture containing an anisotropic ferrite* IRE Trans. Vol. MTT-5 July 1957 str. 184—191.
6. Wadas R.: *Line — width and some magnetic properties of the system $Ni_{1-x-y}Cu_xCo_yFe_2O_4$* Bull. Acad. Polon. Sci Sér. sci techn. Vol. VIII No 5(1960).

WYTYCZNE DLA AUTORÓW

Komitet Redakcyjny prosi autorów o ułatwienie prac redakcyjnych związanych z przygotowaniem do druku nadesłanych artykułów przez przestrzeganie podanych wytycznych przy przygotowaniu maszynopisu:

1. Prace powinny być napisane pismem maszynowym, na pojedynczych arkuszach formatu A4, jednostronnie, z podwójną interlinią (co drugi wiersz), z marginesem 3 cm z lewej strony. Stronice numerowane. Artykuły należy nadsyłać w dwóch egzemplarzach.
2. Wzory i oznaczenia należy wpisywać ręcznie, czytelnie, używając jedynie liter łacińskich i greckich. Wskaźniki niżej liter i wykładniki potęg pisać należy szczególnie dokładnie i wyraźnie.
3. Każda praca powinna być zaopatrzona w krótkie streszczenie (analizę) w języku polskim do 25 wierszy maszynopisu oraz w obszerniejsze streszczenia (do 20% objętości artykułu) w języku rosyjskim oraz angielskim, francuskim lub niemieckim. W razie niemożności nadesłania streszczenia w języku obcym autor dostarcza odpowiednie streszczenie w języku polskim w trzech egz. z jednoczesnym wpisaniem, terminologii w języku rosyjskim oraz w innym języku obcym.
4. Rysunki, wykresy i fotografie należy wykonywać na oddzielnych arkuszach z podaniem kolejnych numerów rysunków. W tekście i na marginesie, obok właściwego tekstu, należy podać jedynie odpowiadający numer rysunku. Ostateczne wykonanie rysunków obowiązuje Redakcję.
5. Wszystkie rysunki, wykresy i fotografie należy nazywać w tekście rysunkami (skrót: rys.) i nie używać określeń, jak figura, szkic, fotografia. U samego dołu rysunku (a przy fotografiach — na odwrocie) należy wpisać czytelnie numer rysunku, napis pod rysunkiem, tytuł pracy i nazwisko autora.
6. Wszystkie tablice (unikać zbyt dużych) podobnie jak rysunki należy wykonywać na oddzielnych arkuszach i numerować kolejno liczbami arabskimi. U góry każdej tablicy podać tytuł (napis) objaśniający.
7. Po zakończeniu artykułu należy podać wykaz literatury, wymieniając w następującej kolejności: nazwisko autora i pierwsze litery imion, pełny tytuł dzieła lub artykułu, tytuł czasopisma, tom, numer zeszytu, rok i miejsce wydania oraz ewentualnie numer strony. Pozycje powinny być ponumerowane w kolejności alfabetycznej autorów; w tekście — powołania na numer pozycji w nawiasie kwadratowym, np. [3].
8. Autorowi przysługuje bezpłatnie 25 egzemplarzy odbitek pracy. Dodatkowe egzemplarze autor może zamówić w redakcji na własny koszt przy przesyłaniu korekty swej pracy.
9. Nie zastosowanie się Autora do powyższych wytycznych pociągnie za sobą konieczność potrącenia z honorarium autorskiego kosztów związanych z doprowadzeniem dostarczonych materiałów do wymaganej formy.

U w a g a: Autora obowiązuje korekta autorska, którą należy zwracać w ciągu 3 dni pod adresem: Redakcja „Archiwum Elektrotechniki”, Warszawa, Koszykowa 75, Politechnika, Zakład Radiotechniki, tel. 8.32.04. Redakcja czynna w poniedziałki, środy i piątki

WARUNKI PRENUMERATY CZASOPISMA

„ARCHIWUM ELEKTROTECHNIKI” — KWARTALNIK

Cena w prenumeracie zł 100,— rocznie, zł 50,— półrocznie. Zamówienia i wpłaty przyjmują:

1. Przedsiębiorstwo Upowszechnienia Prasy i Książki „RUCH”, Poznań, ul. Zwierzyniecka 9, konto PKO Nr 122-6-211.831.

2. Urzędy pocztowe.

Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę 40% drożej. Zamówienia dla zagranicy przyjmuje Przedsiębiorstwo Kolportażu Wydawnictw Zagranicznych „RUCH”, Warszawa, ul. Wilcza 46, konto PKO nr 1-6-100-024.

Bieżące numery do nabycia w księgarniach naukowych „Dom Książki” oraz w Ośrodku Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych Polskiej Akademii Nauk — Wzorcownia Wydawnictw Naukowych PAN — Ossolineum — PWN, Warszawa, Pałac Kultury i Nauki (wysoki parter).

PLACÓWKI „RUCHU”

Białystok, Lipowa 1
 Bielsko-Biała — sklep „Ruchu” nr 1,
 Lenina 7
 Bydgoszcz, Armii Czerwonej 2
 Bytom — sklep „Ruchu” nr 39, Plac
 Kościuszki
 Chorzów, Wolności 54
 Ciechocinek, kiosk nr 4, „Pod Grzyb-
 kiem”
 Częstochowa, II Aleja 26
 Gdańsk, Długa 44/45
 Gdynia, Świętojańska 27
 Gliwice, Zwycięstwa 47
 Gniezno, Mieczysława 31
 Grudziądz, Mickiewicza, sklep nr 5
 Inowrocław, Marchlewskiego 3
 Jelenia Góra, 1-go Maja 1
 Kalisz, Śródmiejska 3
 Katowice Zach., 3 Maja 28
 Kielce, Sienkiewicza 22
 Koszalin, Zwycięstwa 38
 Kraków, Rynek Główny 32
 Krynica, Stary Dom Zdrojowy
 Lublin, Krakowskie Przedmieście
 (obok hotelu „Europa”)
 Łódź, Piotrkowska 200
 Nowy Sącz, Jagiellońska 10

Olsztyn, Plac Wolności (kiosk)
 Opole, Rynek — sklep nr 76
 Ostrów Wlkp., Partyzancka 1
 Płock, Tumską, kiosk nr 270
 Poznań, Dzierżyńskiego 1
 Poznań, Głogowska 66
 Poznań, 27 Grudnia 4
 Przemyśl, Plac Konstytucji 9
 Rzeszów, Kościuszki 5
 Sopot, Monte Cassino 32
 Sosnowiec, Czerwonego Zagłębia,
 kiosk nr 18 (obok dworca kol.)
 Szczecin, Aleja Piastów, róg Jagiel-
 lońskiej
 Toruń, Rynek Staromiejski 9
 Wałbrzych, Wysockiego, obok Placu
 Grunwaldzkiego
 Warszawa, Nowopiękna 3
 Warszawa, Nowy Świat 72, Pałac
 Staszica
 Warszawa, Wiejska 14
 Włocławek, Plac Wolności, róg 3 Maja
 Wrocław, Plac Kościuszki, kiosk nr 9
 Zabrze, Plac 24 Stycznia, pkt nr 50
 Zakopane, Krupówki 51
 Zielona Góra, Świerczewskiego 38

OŚRODEK ROZPOWSZECHNIANIA WYDAWNICTW NAUKOWYCH PAN

Wzorcownia Wydawnictw Naukowych

PAN — OSSOLINEUM — PWN, Warszawa

Pałac Kultury i Nauki — (wysoki parter)